Contrôle : intégration

Exercice 1

Calculer $A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) dx$

Exercice 2

Trouver a, b et c tels que $\frac{x^2+6}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$

Exercice 3

Prouver que $\frac{x^2+3x-6}{x-1} = x + 4 + \frac{-2}{x-1}$

En déduire la valeur de $B = \int_{-5}^{-3} \frac{x^2+3x-6}{x-1} dx$

Exercice 4

Calculer l'intégrale $C = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}-2}^{\sqrt{3}-2} \frac{1}{t^2+4t+5} dt$ à l'aide du changement de variable suivant : x = t+2

Exercice 5

Calculer l'intégrale $D = \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{6}} \frac{1}{\sqrt{1-9t^2}} dt$ à l'aide du changement de variable suivant : x = 3t

Exercice 6

A l'aide d'une intégration par partie calculer $E = \int_0^2 (2-x)e^{-x} dt$.

Exercice Bonus

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle [-a ;a].

1) Comparez $\int_{-a}^{0} f(t) dt$ et $\int_0^a f(t) dt$ si :

a) f est paire b)f est impaire

2) on suppose maintenant que f est impaire et de période 10. Que vaut $\int_{-5}^{5} f(t) dt$, en déduire $\int_0^{10} f(t) dt$ puis $\int_7^{37} f(t) dt$

Exercice à ne pas faire

Dans cet exercice les deux questions sont indépendantes

1) Prouver que $\int_0^1 t(t^2+3)e^{t^2+3} dt = \int_3^4 \frac{1}{2} x e^x dx$ à l'aide du changement de variable suivant : x = $t^2 + 3$ (vous vous occuperez de l'élément différentiel avant de la fonction)

2) A l'aide d'une intégration par partie calculer $\int_3^4 \frac{1}{2} x e^x dx$

Correction :

Exercice 1

Calculer $A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3} 3\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)dx = \left[\frac{1}{3}\left(-\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}$

$= \frac{1}{3}\left(-\cos\left(3\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)\right) - \frac{1}{3}\left(-\cos\left(3\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{-1}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Exercice 2

Trouver a, b et c tels que $\frac{x^2+6}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$

$ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \frac{ax^2+x(a+b)+b+c}{x+1}$ donc

$\frac{x^2+6}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2+6}{x+1} = \frac{ax^2+x(a+b)+b+c}{x+1} \Leftrightarrow x^2 + 6 = ax^2 + x(a+b) + b + c$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a \\ 0 = b + a \\ 6 = c + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a \\ -1 = b \\ 6 = c + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a \\ -1 = b \\ 7 = c \end{cases}$ ainsi $\frac{x^2+6}{x+1} = x - 1 + \frac{7}{x+1}$

Exercice 3

Prouver que $\frac{x^2+3x-6}{x-1} = x + 4 + \frac{-2}{x-1}$

$x + 4 + \frac{-2}{x-1} = \frac{(x+4)(x-1)-2}{x-1} = \frac{x^2+4x-x-4-2}{x-1} = \frac{x^2+3x-6}{x-1}$ CQFD

$B = \int_{-5}^{-3} \frac{x^2+3x-6}{x-1}dx = \int_{-5}^{-3}\left(x+4+\frac{-2}{x-1}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 4x - 2\ln(|x-1|)\right]_{-5}^{-3}$

$= \frac{9}{2} - 12 - 2\ln(4) - \left(\frac{25}{2} - 20 - 2\ln(6)\right) = 2(\ln(6) - \ln(4)) = 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{9}{4}\right)$

Exercice 4

Calculer l'intégrale $C = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}-2}^{\sqrt{3}-2} \frac{1}{t^2+4t+5}dt$ à l'aide du changement de variable suivant : x = t+2

Si t = $\frac{\sqrt{3}}{3} - 2$ alors x= $\frac{\sqrt{3}}{3}$, Si t = $\sqrt{3} - 2$ alors x= $\sqrt{3}$

$\frac{1}{t^2+4t+5} = \frac{1}{(x-2)^2+4(x-2)+5} = \frac{1}{x^2-4x+4+4x-8+5} = \frac{1}{x^2+1}$ x = t+2 donc dx = dt

$C = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}-2}^{\sqrt{3}-2} \frac{1}{t^2+4t+5}dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx = [\mathrm{Arctan}(x)]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} = \mathrm{Arctan}(\sqrt{3}) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

Exercice 5

Calculer l'intégrale $D = \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{6}} \frac{1}{\sqrt{1-9t^2}}dt$ à l'aide du changement de variable suivant : x = 3t

Les nouvelles bornes sont $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et 0 , $\frac{1}{\sqrt{1-9t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(3t)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, x = 3t donc dx = 3dt

$D = \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dx}{3} = \left[\frac{\mathrm{Arcsin}(x)}{3}\right]_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{3} - \frac{\mathrm{Arcsin}(0)}{3} = \frac{\frac{\pi}{4}}{3} - 0 = \frac{\pi}{12}$

Exercice 6

$E = \int_0^2 (2-x)e^{-x}dt.$ u(x)=(2-x)   u'(x)=-1

v'(x) = e^{-x} v(x) = $-e^{-x}$

$E = [-(2-x)e^{-x}]_0^2 - \int_0^2 e^{-x}dt$

$= [-(2-x)e^{-x}]_0^2 - [-e^{-x}]_0^2$

$= [-(2-x)e^{-x} + e^{-x}]_0^2$

$= -(2-2)e^{-2} + e^{-2} - (-(2-0)e^{-0} + e^{-0})$

$= e^{-2} + 1$

Exercice Bonus

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle [-a ;a].

1) Comparez $\int_{-a}^{0} \mathrm{f(t)}dt$ et $\int_{0}^{a} \mathrm{f(t)}dt$ si :

a) f est paire : $\int_{-a}^{0} \mathrm{f(t)}dt$ = $\int_{0}^{a} \mathrm{f(t)}dt$ b)f est impaire : $\int_{-a}^{0} \mathrm{f(t)}dt$ =- $\int_{0}^{a} \mathrm{f(t)}dt$

2) on suppose maintenant que f est impaire et de période 10.

Comme f est impaire on a : $\int_{-5}^{5} \mathrm{f(t)}dt = \int_{-5}^{0} \mathrm{f(t)}dt + \int_{0}^{5} \mathrm{f(t)}dt = -\int_{0}^{5} \mathrm{f(t)}dt + \int_{0}^{5} \mathrm{f(t)}dt = 0$,

Comme f est de période 10 on a : $\int_{0}^{10} \mathrm{f(t)}dt = \int_{-5}^{-5+10} \mathrm{f(t)}dt = \int_{-5}^{5} \mathrm{f(t)}dt = 0$

$\int_{7}^{37} \mathrm{f(t)}dt = \int_{7}^{7+10} \mathrm{f(t)}dt + \int_{17}^{17+10} \mathrm{f(t)}dt + \int_{27}^{27+10} \mathrm{f(t)}dt = 3\int_{0}^{10} \mathrm{f(t)}dt = 0$

Exercice à ne pas faire

Dans cet exercice les deux questions sont indépendantes

1) Prouver que $\int_{0}^{1} t(t^2+3)e^{t^2+3}dt = \int_{3}^{4} \frac{1}{2} xe^x dx$ à l'aide du changement de variable suivant : x = t^2+3

x = t^2+3 donc dx = $2t\ dt$, maintenant je m'occupe de $t(t^2+3)e^{t^2+3}$ je laisse le t de côté car il sera utilisé par l'élément différentiel. $(t^2+3)e^{t^2+3} = xe^x$ pour les bornes on aura : si t = 0 , x = $t^2+3 = 3$ et si t = 1 , x = $t^2+3 = 4$ on a donc bien : $\int_{0}^{1} t(t^2+3)e^{t^2+3}dt = \int_{3}^{4} \frac{1}{2} xe^x dx$

2) à l'aide d'une intégration par partie calculer $\int_{3}^{4} \frac{1}{2} xe^x dx$

u(x)= $\frac{1}{2}x$ u'(x)= $\frac{1}{2}$

v'(x) =e^x v(x) = e^x

donc $\int_{3}^{4} \frac{1}{2} xe^x dx = \left[\frac{1}{2}xe^x\right]_3^4 - \int_{3}^{4} \frac{1}{2} e^x dt = \frac{1}{2}4e^4 - \frac{1}{2}3e^3 - \left[\frac{1}{2}e^x\right]_3^4 = 2e^4 - 1{,}5e^3 - \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{2}e^3$

$= 1{,}5e^4 - 1e^3$