gaelle.buffet@ac-montpellier.fr

Chap 3. Calcul intégral

I. Intégrale d'une fonction dérivable :

Définition.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, F une primitive de f sur I, a et b deux nombres de I. On appelle intégrale de a à b de f le nombre réel noté $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ et on note : $\int_a^b f(t)dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

Méthode.
Pour calculer $\int_a^b f(t)dt$, on commence par déterminer une primitive F de f et on note $\int_a^b f(t)dt = [\mathrm{F}(t)]_a^b$, puis on calcule $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

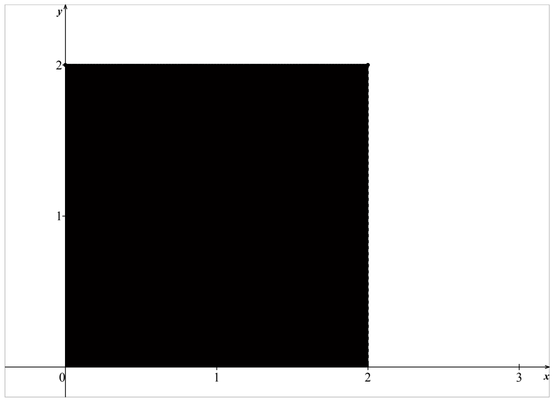
Remarque.
Dans l'expression $\int_a^b f(t)dt$, la variable t est dite muette ce qui signifie que l'on peut la remplacer par une autre variable : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$.

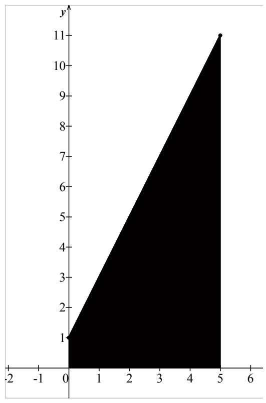
Exemples.
Calculer les intégrales suivantes : $\int_0^3 4dt$, $\int_1^2 (x^2+1)dx$, $\int_1^e \frac{1}{t}dt$, $\int_2^1 \frac{1}{t^2}dt$, $\int_0^{\ln 2} e^x dx$, $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t dt$

II. Interprétation graphique de l'intégrale :

Cas des fonctions positives.

1er exemple. Une fonction constante.
On considère la fonction constante f définie sur [0,2] telle que $f(x) = 2$.
Traçons la fonction f et déterminons l'aire « sous la courbe ».
L'aire du rectangle est 2×2 = 4
Calculons $\int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 2dt = [2t]_0^2 = 4 - 0 = 4$



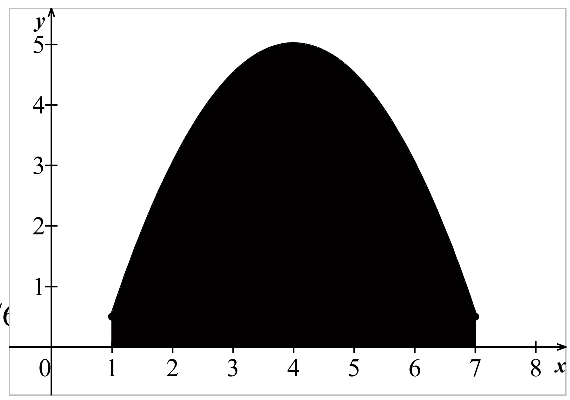


2e exemple. Une fonction affine.
On considère la fonction affine g définie sur [0,5] telle que $g(x) = 2x+1$.
Traçons la fonction g et déterminons l'aire « sous la courbe ».
L'aire du trapèze est $\frac{(1+11)\times 5}{2} = 30$
Calculons $\int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 (2x+1)dx = \left[2\frac{x^2}{2} + x\right]_0^5 = [x^2+x]_0^5 = 25 + 5 = 30$

Théorème.

Soit f une fonction dérivable et positive sur un intervalle $[a,b]$.

L'aire a du domaine délimité par la courbe c d'équation $y = f(x)$, l'axe des abscisses et les



droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$
est : $a = \int_a^b f(t)dt$.

Remarque.
L'aire est calculée en « unités d'aire ». Cette unité dépend des longueurs choisies comme unité sur l'axe des abscisses et des ordonnées.

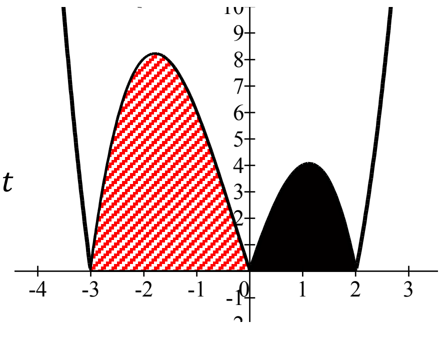
Exemple.
Déterminer la portion d'aire comprise entre la courbe de la fonction $f(x) = e^x$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2$.

□ Cas des fonctions négatives.
Théorème.
Soit f une fonction dérivable et **négative** sur un intervalle $[a,b]$.
L'aire a du domaine délimité par la courbe c d'équation $y = f(x)$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ est : $a = -\int_a^b f(t)dt$.

□ Intégrale fonction de sa borne supérieure
Théorème.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit a un point de I.
La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui vaut 0 au point a.

Exemple.
Déterminer les fonctions suivantes :
Pour $x > \sqrt{10}$ $\int_{\sqrt{10}}^{x} \frac{t}{t^2-9} dt = \frac{1}{2}\left[\ln\left(t^2-9\right)\right]_{\sqrt{10}}^{x} = \frac{\ln\left(x^2-9\right)}{2}$
et $\int_{\frac{\pi}{18}}^{x} \sin\left(3t+\frac{\pi}{3}\right) dt = \left[\frac{-\cos\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)}{3}\right]_{\frac{\pi}{18}}^{x} = \frac{-1}{3}\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$

III. Propriétés de l'intégrale :



Théorème. Relation de Chasles
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit a, b et c trois points de I.

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

Cas particulier.

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$$

Exemple.

$$\int_{-1}^{1} |t|dt = \int_{-1}^{0} -tdt + \int_{0}^{1} tdt = \left[-\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Théorème. Linéarité de l'intégrale
Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit a et b deux points de I.
Soit α et β deux nombres réels

$$\int_a^b (\alpha f+\beta g)(t)dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$$

Exemple.

$$\int_1^2 \left(6t+\frac{5}{t}\right)dt = 6\int_1^2 tdt + 5\int_1^2 \frac{1}{t}dt = 6\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 + 5[\ln t]_1^2 = 6\left[2-\frac{1}{2}\right] + 5\ln 2 = 9+5\ln 2$$

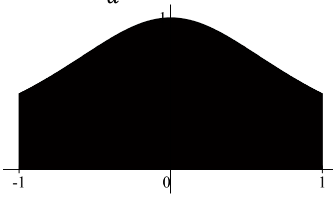
Théorème. Positivité

Si f est une fonction dérivable et positive sur un intervalle $[a,b]$, avec $a \le b$ alors $\int_a^b f(t)dt \ge 0$.

Exemple.

$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2}dt$, $\frac{1}{1+t^2} \ge 0$ donc $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2}dt \ge 0$

en effet $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2}dt = [\mathrm{Arctan}t]_{-1}^1 = \mathrm{Arctan}1 - \mathrm{Arctan}(-1) = \frac{\pi}{4}\times 2 = \frac{\pi}{2}$



Calculatrice.

math, 9 : fonctIntégr(1/(1+x^2),x,0,1)

ou bien $f(x)$ Y1 = 1/(1+x^2) 2nde Calcul 7 : $\int f(x)dx$, Borne Inf ? –1, Borne Sup 1

Théorème. Intégration d'une inégalité

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a,b]$

Si pour tout t de $[a,b]$ $f(t) \le g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$

Exemple.

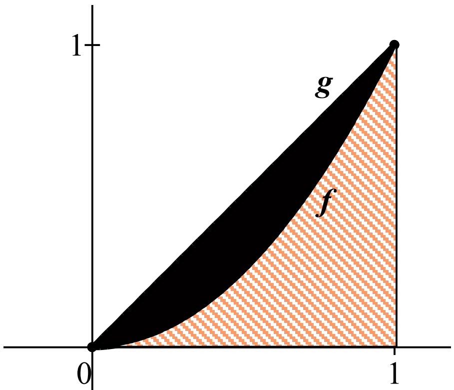
Donner un encadrement de $\int_0^1 e^{t^2}dt$.

On sait que si $0 \le t \le 1$ alors $0 \le t^2 \le t$ en multipliant par t.

donc $e^0 \le e^{t^2} \le e^t$ car la fonction exponentielle est croissante.

On en déduit donc que $\int_0^1 e^0 dt \le \int_0^1 e^{t^2}dt \le \int_0^1 e^t dt$

Soit $[t]_0^1 \le \int_0^1 e^{t^2}dt \le [e^t]_0^1 \quad \Rightarrow \quad 1 \le \int_0^1 e^{t^2}dt \le e-1 \approx 1{,}71$



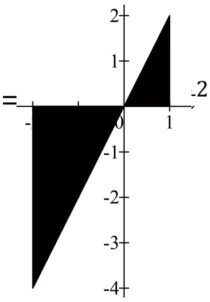
Théorème. Valeur absolue

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a,b]$: $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$

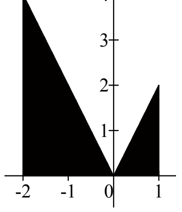
Exemple.

Soit la fonction $f(t) = 2t$ sur $[-2,1]$

$$\int_{-2}^1 f(t)dt = [t^2]_{-2}^1 = 1-4 = -3$$



donc $\left|\int_{-2}^1 f(t)dt\right| = |-3| = 3$

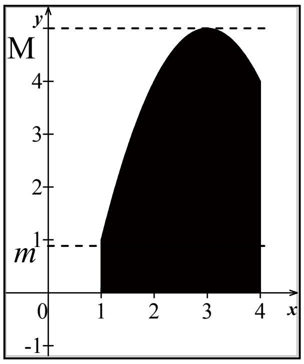


La fonction $|f(t)| = |2t|$ sur $[-2,1]$

donc $f(t) = -2t$ sur $[-2,0]$ et $f(t) = 2t$ sur $[0,1]$

$$\int_{-2}^1 |f(t)|dt = \int_{-2}^0 -2tdt + \int_0^1 2tdt = -\left[t^2\right]_{-2}^0 + \left[t^2\right]_0^1$$
$$= -(-4)+1 = 5$$

On a bien $\left|\int_{-2}^1 f(t)dt\right| \le \int_{-2}^1 |f(t)|dt$.



Théorème. Inégalité de la moyenne
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a,b]$ avec $a \leq b$
si pour tout $t \in [a,b]$, $m \leq f(t) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$

Interprétation graphique.
$\int_a^b f(t)dt$ représente l'aire située entre l'axe des abscisses et la courbe de f, $x = a$ et $x = b$. Cette aire est comprise entre l'aire du rectangle de largeur $(b-a)$ et de longueur m la valeur minimale de f et l'aire du rectangle de largeur $(b-a)$ et de longueur M la valeur maximale de f.

Définition.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a,b]$ avec $a \leq b$
On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le nombre réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

Exemple.
Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x^2$ sur $[0,1]$.

$$\frac{1}{1-0}\int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Théorème. Inégalité des accroissements finis :
si $a \leq b$ et si $|f'| \leq k$, alors $|f(b) - f(a)| \leq k(b-a)$.

IV. Intégration par parties :

Théorème. Intégrations par parties
Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle $[a,b]$ telles que :
Si u et v sont dérivables sur $[a,b]$ et que u' et v' sont aussi dérivables sur $[a,b]$
alors $\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$
Démonstration.
$(uv)' = u'v + uv'$ donc $uv' = (uv)' - u'v$ Si ces deux fonctions sont égales alors leurs intégrales le sont aussi donc $\int_a^b u(t)v'(t)dt = \int_a^b (uv)'(t)dt - \int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$

Exemples.
► 1. Calculez $I = \int_0^1 te^t dt$.
On utilise l'intégration par parties : $\begin{matrix} u'(t) = e^t & u(t) = e^t \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{matrix}$
donc $I = [te^t]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^t dt = e - [e^t]_0^1 = e - [e - e^0] = e - e + 1 = 1$
► 2. Déterminer la primitive de $\ln x$ qui s'annule en 1 soit $F(x) = \int_1^x \ln t dt$
On utilise l'intégration par parties : $\begin{matrix} u'(t) = 1 & u(t) = t \\ v(t) = \ln t & v'(t) = \frac{1}{t} \end{matrix}$
donc $F(x) = [t\ln t]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt = x\ln x - [t]_1^x = x\ln x - x + 1$

V. Intégration par changement de variable :

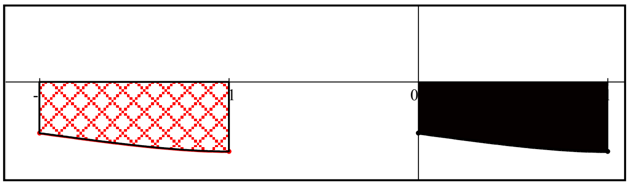
gaelle.buffet@ac-montpellier.fr

□ Changement du type $t \mapsto t + \lambda$

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a+\lambda, b+\lambda]$
Avec le changement de variable : $x = t + \lambda$ alors $\int_a^b f(t+\lambda)\, dt = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(x)\, dx$

Exemple.

Calculons $\mathrm{I} = \int_0^1 (t-2)e^{t-2}\, dt$



Le changement de variable est $x = t - 2$ donc, ici, $\lambda = -2$.

a) Je détermine les nouvelles bornes d'intégration :

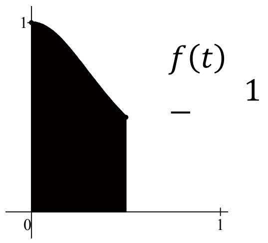
Si $t = 0$ alors $x = -2$ et si $t = 1$ alors $x = -1$

b) Je détermine l'expression de $f(t)$ en fonction de x : $f(t) = (t-2)e^{t-2} = xe^x$

c) Je détermine l'élément différentiel, *i.e.* j'écris t en fonction de x : $t = x + 2 = h(x)$, je dérive t par rapport à x : $\frac{dt}{dx} = h'(x) = 1$ donc $dt = dx$

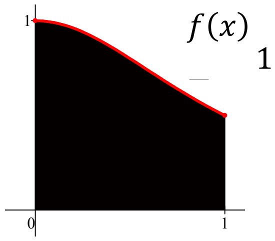
d) Je termine le calcul : $\mathrm{I} = \int_0^1 (t-2)e^{t-2}\, dt = \int_{-2}^{-1} xe^x\, dx = [xe^x]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} e^x\, dx = -e^{-1} + 2e^{-2} - e^{-1} + e^{-2} = -2e^{-1} + 3e^{-2}$

□ Changement du type $t \mapsto \lambda t$ où λ n'est pas nul.



Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[\lambda \times a, \lambda \times b]$
Avec le changement de variable : $x = \lambda \times t$ alors $\int_a^b f(\lambda t)\, dt = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x)\, dx$

Exemple : Calcul de $\mathrm{J} = \int_0^{1/2} \frac{1}{1+4t^2}\, dt = \int_0^{1/2} \frac{1}{1+(2t)^2}\, dt$



Le changement de variable est $x = 2t$ donc $\lambda = 2$.

a) Je détermine les nouvelles bornes d'intégration :

Si $t = 0$ alors $x = 0$ et si $t = 1/2$ alors $x = 1$

b) Je détermine l'expression de $f(t)$ en fonction de x : $f(t) = \frac{1}{1+(2t)^2} = \frac{1}{1+x^2}$

c) Je détermine l'élément différentiel, *i.e.* j'écris t en fonction de x : $t = \frac{x}{2} = h(x)$, je dérive t par rapport à x : $\frac{dt}{dx} = h'(x) = \frac{1}{2}$ donc $dt = \frac{1}{2}dx$

d) Je termine le calcul : $\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \times \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}[\arctan x]_0^1 = \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$

□ Autres changements de variable.

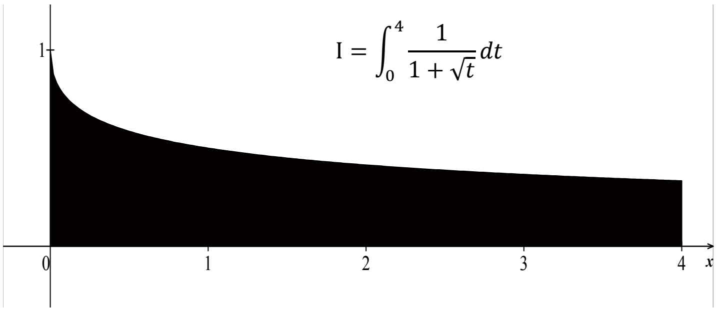
Exemples.

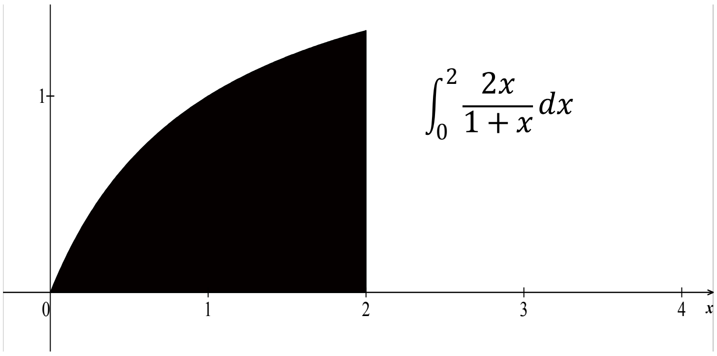
$\mathrm{I} = \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt$ avec le changement de variable $x = \sqrt{t}$

a) Je détermine les nouvelles bornes d'intégration : Si $t = 0$ alors $x = 0$ et si $t = 4$ alors $x = 2$

b) Je détermine l'expression de $f(t)$ en fonction de x : $f(t) = \frac{1}{1+\sqrt{t}} = \frac{1}{1+x}$

c) Je détermine l'élément différentiel, *i.e.* j'écris t en fonction de x : $t = x^2 = h(x)$, je dérive t par rapport à x : $\frac{dt}{dx} = h'(x) = 2x$ donc $dt = 2xdx$





d) Je termine le calcul : $\mathrm{I} = \int_0^2 \frac{2x}{1+x} dx = 2\int_0^2 \frac{x+1-1}{1+x} dx = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = 2[x - \ln(1+x)]_0^2 = 2[2 - \ln(1+2)] = 4 - 2\ln 3$

VI. Cas particuliers de simplification :

□ Intégrale d'une fonction paire ou impaire

Théorème.

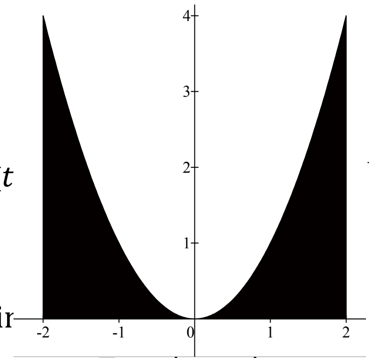
Soit f une fonction dérivable sur $[-a,a]$

① Si f est paire sur $[-a,a]$ alors $\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 2\int_0^a f(t$

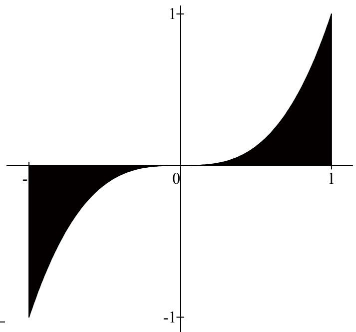
② Si f est impaire sur $[-a,a]$ alors $\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 0$

Exemple.

$\int_{-3\pi}^{3\pi}$ sin



Fonction paire



Fonction impaire

□ Intégrale d'une fonction périodique

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.

Alors, pour tout a de □, on a $\int_a^{a+\mathrm{T}} f(t)\, dt = \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\, dt$.