Intégration

Exercice 1.
Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes A $= \int_1^2 dx$, B $= \int_1^2 t^3 dt$, C $= \int_2^3 (x^2+x+1)dx$, D $= \int_1^2 \frac{1}{t}dt$, E $= \int_1^2 \frac{2}{x^2}dx$ et F $= \int_1^2 \frac{4}{1+x}dx$

Exercice 2.
Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes G $= \int_{-1}^1 3dx$ etH $= \int_0^1 (4+t)^3 dt$.

Exercice 3.
Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes I $= \int_0^2 (x^2-3x+1)dx$ et J $= \int_1^4 (2y-1)^2 dy$.

Exercice 4.
Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes K $= \int_{\frac{3}{2}}^3 \frac{1}{2t-1}dt$ et L $= \int_0^1 \frac{1}{x-2}dx$.

Exercice 5.
Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes M $= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2+1}dx$ et N $= \int_2^e \frac{\ln t}{t}\ dt$.

Exercice 6.
Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes O $= \int_0^1 e^{2t}dt$ et P $= \int_0^1 3e^{-2t+1}dt$.

Exercice 7.
Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes Q $= \int_1^2 \frac{e^x}{e^x+1}dx$ etR $= \int_0^1 xe^{x^2}dx$.

Exercice 8.
Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes S $= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 4t\ \ dt$ et T $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \sin\Big(3x +$ $\pi 6 dx$.

Exercice 9.
Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes U $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 3t + 2\cos 2t)dt$ et V $= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$.

Exercice 10.
Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes W $= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 4x \cos 2x dx$ et X $= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 t\ \ dt$.

Exercice 11.
Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes Y $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3t \cos t dt$ et Z $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \sin 4x\ \ dx$.

Exercice 12.
▶1. Déterminer deux réels a et b tels que

$$\frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$$

▶2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_2^3 \frac{3x-1}{x^2-1}dx$$

Exercice 13.
On souhaite calculer $I = \int_0^1 \frac{3t-14}{t^2-t-6}dt$
▶1. Résoudre l'équation $t^2-t-6=0$ puis factoriser t^2-t-6.
▶2. Déterminer deux réels a et b tels que

$$\frac{3t-14}{t^2-t-6} = \frac{a}{t+2} + \frac{b}{t-3}$$

▶3. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

Exercice 14.
On pose $f(x) = \frac{-3x^2+16x+22}{(2x+5)(x-1)^2}$
▶1. Déterminer deux réels a et b tels que

$$f(x) = \frac{a}{2x+5} + \frac{b}{(x-1)^2}$$

▶2. En déduire une primitive de f sur $]1,+\infty[$.
▶3. Calculer la valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_2^3 f(x)dx$$

Exercice 15.
On pose $f(t) = \frac{1}{(1+t)(t-2)}$
▶1. Déterminer deux réels a et b tels que

$$f(t) = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{t-2}$$

▶2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_3^5 f(t)dt$$

Exercice 16.
On souhaite calculer $I = \int_0^1 \frac{2x^2+x+1}{x+3}dx$

▶1. Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que $\frac{2x^2+x+1}{x+3} = ax + b + \frac{c}{x+3}$
▶2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I.

Exercice 17.
Soit f la fonction $f(x) = (2-x)e^{-x}$ définie sur$\mathbb{R}$.
A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_0^2 f(t)dt$.

Exercice 18.
A l'aide de deux intégrations par parties, calculer l'intégrale $J = \int_0^2 (x-2)^2 e^{-x} dx$. En donner une valeur arrondie à 10^{-2}.

Exercice 19.
Calculer l'intégrale $K = \int_1^e (t-e)\ln t dt$.

Exercice 20.
Calculer l'intégrale$L = \int_1^e x^2 \ln x dx$.

Exercice 21.
Calculer l'intégrale $M = \int_1^3 (2+x)e^{-x} dx$.

Exercice 22.
Soit f la fonction définie sur]–2,2[par $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.
▶1. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$. Que peut-on en déduire pour le signe de $I = \int_0^1 f(x)dx$.
▶2. Calculer $f'(x)$ puis démontrer que $\int_0^1 f(x)dx = \ln 3 - \int_0^1 \frac{4x}{4-x^2} dx$. Calculer I.

Exercice 23.
Soit f et g les fonctions définies sur [0,1] par $f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$ et $g(x) = \ln(4-x^2)$.
▶1. Montrer que pour tout x de [0,1] $f(x) = -1 + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}$.
▶2. Calculer la valeur exacte de $I = \int_0^1 f(x)dx$.
▶3. Montrer que $J = \int_0^1 g(x)dx = \ln 3 + 2I$. En déduire la valeur exacte de J.

Exercice 24.
▶1. Dériver $f(x) = (2x+1)^{\frac{3}{2}}$ sur $]-0,5;-\infty[$.
▶2. Calculer $\int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$.
▶3. Calculer $\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{2x+1}} dx$.

Exercice 25.
▶1. Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$.
▶2. A l'aide du changement de variable $x = 2t$, déterminer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{1}{1+4t^2} dt$. En donner une valeur arrondie à 10^{-2}.
▶3. A l'aide du changement de variable $x = t+2$, déterminer l'intégrale $K = \int_0^1 \frac{1}{5+4t+t^2} dt$.

Exercice 26.
A l'aide du changement de variable $x = t - \frac{1}{2}$, déterminer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{dx}{\frac{5}{4}+x+x^2}$. En donner une valeur arrondie à 10^{-3}.

Exercice 27.
A l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)$, déterminer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$. En donner une valeur arrondie à 10^{-3}.

Exercice 28.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^{2x}$. On appelle c la courbe de f tracée dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
▶1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire ?
▶2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe c.
▶3. Déterminer l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, la courbe c et l'axe des abscisses.

Exercice 29.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-2x}$. On désigne par c sa courbe dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
▶1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire ?
▶2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe c.
▶3. Déterminer l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$, la courbe c et l'axe des abscisses.