qcm : polynésie 21 juin 2019 / métropole juin 2019
spé : Centre étranger 13 juin 2017
proba : métropole septembre 2019

Exercice 1

QCM : b b b c

Affirmations

3. On considère l'équation suivante :

$$\ln\left(x^2\right)-\ln\left(\frac{x^5}{\mathrm{e}}\right)+\ln(2)=\ln(2x)+5.$$

Affirmation 3 : $\frac{1}{\mathrm{e}}$ est l'unique solution de cette équation.

On cherche des solutions dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ pour que $\ln\left(\frac{x^5}{\mathrm{e}}\right)$ et $\ln(2x)$ soient définis.

$\ln\left(x^2\right)-\ln\left(\frac{x^5}{\mathrm{e}}\right)+\ln(2)=\ln(2x)+5 \iff \ln\frac{x^2}{\frac{x^5}{\mathrm{e}}}+\ln 2-\ln(2x)=5 \iff \ln\frac{\mathrm{e}}{x^3}+\ln\frac{2}{2x}=5 \iff$

$\ln\left(\frac{\mathrm{e}}{x^3}\right)+\ln\left(\frac{1}{x}\right)=5 \iff \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{x^3}\times\frac{1}{x}\right)=5 \iff \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{x^4}\right)=5 \iff \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{x^4}\right)=\ln\left(\mathrm{e}^5\right)$, d'où par croissance de la fonction logarithme :

$\frac{\mathrm{e}}{x^4}=\mathrm{e}^5 \iff \frac{1}{x^4}=\mathrm{e}^4 \iff \frac{1}{x}=\mathrm{e} \iff x=\frac{1}{\mathrm{e}}$: l'affirmation est vraie.

4. Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\,;15]$. On suppose que sa fonction dérivée, notée f', est continue sur $[0\,;15]$. Les variations de f' sont représentées dans le tableau ci-dessous.

x	0		5		15
$f'(x)$	30	$\searrow$	-5	$\nearrow$	20

Affirmation 4 : La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une et une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.

D'après le tableau de variations de f', cette dérivée s'annule sur l'intervalle $[0;5]$ et sur l'intervalle $[5;15]$. Il existe donc $a\in[0\,;5[$ tel que $f'(a)=0$ et $b\in]5\,;15]$ tel que $f'(b)=0$. En ces deux points distincts le nombre dérivé est nul ce qui signifie que les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ sont horizontales : l'affirmation est fausse.

Affirmation 5 : La fonction f est convexe sur $[5\,;15]$.

D'après le tableau de variations f est décroissante sur $[5\,;b]$ et croissante sur $[b\,;15]$; comme f' est croissante sur $[5;15]$, la fonction f est convexe sur cet intervalle : affirmation vraie.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5\mathrm{e}^{-0,3x}+1$.

Affirmation B : La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;5]$ est égale à 3,6, arrondie au dixième.

Une primitive F de la fonction f sur $[0\,;5]$ est définie par $F(x)=5\frac{\mathrm{e}^{-0,3x}}{-0,3}+x$.

$F(5)=5-\frac{5}{0,3}\mathrm{e}^{-1,5}$ et $F(0)=0-\frac{5}{0,3}\mathrm{e}^{0}=-\frac{5}{0,3}$

La valeur moyenne de f sur $[0\,;5]$ est

$m=\frac{1}{5-0}\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}[F(5)-F(0)]=\frac{1}{5}\left[\left(5-\frac{5}{0,3}\mathrm{e}^{-1,5}\right)-\left(-\frac{5}{0,3}\right)\right]\approx 3,6$

Affirmation B vraie

Exercice 2

En 2018, Laurence, souhaitant se lancer dans l'agriculture biologique, a acheté une ferme de 14 hectares de pommiers. Elle estime qu'il y a 300 pommiers par hectare. Chaque année, Laurence élimine 4 % des pommiers existants et replantera 22 nouveaux pommiers par hectare.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de pommiers par hectare l'année $2018+n$. On a ainsi $u_0=300$.

1. a. Soit u_n le nombre de pommier par hectare l'année n; l'année suivante supprimer 4 % revient à multiplier u_n par $1-\frac{4}{100}=1-0,04=0,96$.
Il restera donc $0,96\times u_n$ et en plantant 22 pommiers il y aura donc l'année $n+1$:

$$u_{n+1}=0,96u_n+22.$$

b. • En 2019, $n=1$, donc $u_1=0,96u_0+2=0,96\times300+22=288+22=310$;
• En 2020, $n=2$, donc $u_2=0,96u_1+22=0,96\times310+22=297,6+22=319,6$ soit 320 pommiers à l'unité près.

2.

a.

```
N ← 0
U ← 300
Tant que U ⩽ 400
        N ← N + 1
        U ← 0,96 × U + 22
Fin Tant que
```

b. On peut programmer l'algorithme et faire afficher la valeur de N.
Sur une calculatrice en entrant 300, puis $*0{,}96+22$, il faut appuyer 13 fois sur la touche Entrée pour obtenir plus de 400 : $u_{12} \approx 396{,}8$ et $u_{13} \approx 402$, donc $N = 13$.

3. a. On a quel que soit le naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 550 = 0{,}96u_n + 22 - 550$

$v_{n+1} = 0{,}96u_n - 528 = 0{,}96\left(u_n - \dfrac{528}{0{,}96}\right) = 0{,}96\,(u_n - 550) = 0{,}96v_n$.

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_{n+1} = 0{,}96v_n$: cette relation montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,96, de premier terme $v_0 = u_0 - 550 = 300 - 550 = -250$.

b. On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = v_0 \times 0{,}96^n$, soit :

$$v_n = -250 \times 0{,}96^n.$$

Or $v_n = u_n - 550$ donc $u_n = v_n + 550 = -250 \times 0{,}96^n + 550$.
Finalement quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 550 - 250 \times 0{,}96^n$.

c. 2025 correspond à $n = 7$.
$u_7 = 550 - 250 \times 0{,}96^7 \approx 362{,}1$, donc 362 pommiers à l'unité près par hectare.
Or l'exploitation de Laurence a une superficie de 14 hectares.
Elle devrait donc avoir en 2025 :
$14 \times u_7 = 14\left(550 - 250 \times 0{,}96^7\right) \approx 5069{,}9$ soit 5 070 pommiers à l'unité près.

d. On a $u_n > 400 \iff 550 - 250 \times 0{,}96^n > 400 \iff 150 > 250 \times 0{,}96^n \iff \dfrac{150}{250} > 0{,}96^n \iff$ $0{,}6 > 0{,}96^n \iff \ln 0{,}6 > n \ln 0{,}96$ (par croissance de la fonction logarithme népérien), d'où $n > \dfrac{\ln 0{,}6}{\ln 0{,}96}$ (car $\ln 0{,}96 < 0$).

Or $\dfrac{\ln 0{,}6}{\ln 0{,}96} \approx 12{,}5$. On retrouve bien que la plus petite valeur solution de l'inéquation est 13.

Exercice 3

Partie A

Pour mieux cerner le profil de ses clients, une banque réalise un sondage qui permet d'établir que :

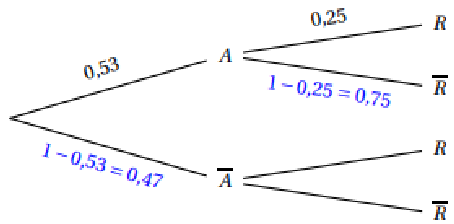
- 53 % de ses clients ont plus de 50 ans ;
- 32 % de ses clients sont intéressés par des placements dits *risqués* ;
- 25 % de ses clients de plus de 50 ans sont intéressés par des placements dits *risqués*.

On choisit au hasard un client de cette banque et on considère les évènements suivants :

- A : « Le client a plus de 50 ans » ;
- R : « Le client est intéressé par des placements dits risqués ».

1. D'après le texte, $P(R) = 0{,}32$ et $P_A(R) = 0{,}25$.

2. On représente la situation par un arbre pondéré :



3. L'évènement « le client ait plus de 50 ans et est intéressé par des placements dits risqués » est $A \cap R$.
$P(A \cap R) = P(A) \times P_A(R) = 0{,}53 \times 0{,}25 = 0{,}1325$.

4. Sachant que le client est intéressé par des placements dits risqués, la probabilité qu'il ait plus de 50 ans est $P_R(A) = \dfrac{P(A \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0{,}1325}{0{,}32} \approx 0{,}414$.

5. D'après la formule des probabilités totales, $P(R) = P(A \cap R) + P\left(\overline{A} \cap R\right)$ donc
$P\left(\overline{A} \cap R\right) = P(R) - P(A \cap R) = 0{,}32 - 0{,}1325 = 0{,}1875$.

On en déduit que $P_{\overline{A}}(R) = \dfrac{P\left(\overline{A} \cap R\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \dfrac{0,1875}{0,47} \approx 0,399$.

Cela signifie :

- qu'il y a 18,75 % de clients qui ont moins de 50 ans et qui sont intéressés par des placements dits risqués ;
- que parmi les clients de moins de 50 ans, il y en a environ 39,9 % qui sont intéressés par des placements dits risqués.

Partie B

L'une des agences de cette banque charge ses conseillers de proposer un placement dit *risqué*, R_1 à tous ses clients.
Elle promet à ses conseillers une prime de 150 € s'ils convainquent au moins 10 clients d'effectuer ce placement en un mois et une prime supplémentaire de 150 € s'ils convainquent au moins 15 clients d'effectuer ce placement en un mois.
L'une des conseillères de cette banque, Camille, reçoit 45 clients ce mois-ci.

1. On admet que la probabilité que Camille réussisse à placer ce produit auprès de l'un de ses clients est de 0,23 et que la décision d'un client est indépendante de celles des autres clients.
   La variable aléatoire X qui donne le nombre de clients convaincus par Camille suit la loi binomiale de paramètres $n = 45$ et $p = 0,23$.
   a. La probabilité que Camille place le produit R_1 auprès de 10 clients exactement ce mois-ci est $P(X = 10) = \binom{45}{10} \times 0,23^{10} \times (1 - 0,23)^{45-10} \approx 0,141$.
   b. Camille a 300 € de prime si elle vend au moins 15 produits aux 45 clients ; la probabilité de cet évènement est $P(X \geqslant 15) = 1 - P(X \leqslant 14) \approx 0,075$.
   c. Camille a exactement 150 € de prime si elle place plus de 10 produits et moins de 15 ; la probabilité de cet évènement est $P(10 \leqslant X < 15) = P(10 \leqslant X \leqslant 14) \approx 0,532$.
2. Le placement R_1 a rapporté 30 % d'intérêt sur les 5 dernières années. Le taux d'intérêt annuel moyen t du placement R_1 sur ces 5 dernières années vérifie l'égalité $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^5 = 1 + \dfrac{30}{100}$.
   On a donc $1 + \dfrac{t}{100} = \left(1 + \dfrac{30}{100}\right)^{\frac{1}{5}}$ et donc $\dfrac{t}{100} = \left(1 + \dfrac{30}{100}\right)^{\frac{1}{5}} - 1$ ou encore $t = 100 \times \left[\left(1 + \dfrac{30}{100}\right)^{\frac{1}{5}} - 1\right]$.
   Le taux d'intérêt annuel moyen est d'environ 5,39 %.

Exercice 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. On lit $f(0) \approx 112$ et $f(60) \approx 70$.
2. Puisque A de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 7 est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$, on sait que $f''(7) = 0$.
3. **a.** Voir l'annexe 2.
   b. La surface contient le rectangle de dimensions 70 et 60 soit une aire d'au moins 4 200 unités d'aire : l'estimation de l'ébéniste est inférieure à la réalité.

Partie B

1. La fonction f est dérivable car produit de sommes de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0 ; 60]$.
   La dérivée de la constante étant nulle, il faut dériver $u(x) \times v(x)$, avec
   $u(x) = 14x + 42$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$, on obtient :
   $u'(x) = 14$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$. Donc
   $$f'(x) = 14\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}} + (14x + 42) \times \left(-\frac{1}{5}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}} = \mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}\left(14 - \frac{14x + 42}{5}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}\left(\frac{70 - 14x - 42}{5}\right)$$
   $$= \mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}\left(\frac{28 - 14x}{5}\right).$$

2. a. Comme $5>0$ et que quel soit le réel x, $\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}>0$, le signe de $f'(x)$ est celui de la différence $28-14x=14(2-x)$.

On voit aisément que si $0\leqslant x<2$, alors $2-x>0$: la dérivée est positive sur $[0;2[$;

$f'(2)=0$;

si $x>2$, alors $2-x<0$: la dérivée est négative sur $]2;60]$.

b. On déduit des résultats précédents le tableau de variations de la fonction f :

x	0		2		60
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	112	↗	≈ 117	↘	≈ 70

Avec $f(0)=70+42=112$; $f(2)=70+70\mathrm{e}^{-0,4}\approx 116{,}922$ et $f(60)=70+882\mathrm{e}^{-12}\approx 70{,}0054$.

3. Le logiciel indique que $f''(x)=14\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x}\times\dfrac{x-7}{25}$.

Comme $\dfrac{14}{25}>0$ et que quel soit le réel x, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x}>0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $x-7$.

Donc $f''(x)=0 \iff x=7$, ce qui montre que la fonction a un point d'inflexion pour $x=7$.

De plus $f''(x)<0 \iff x-7<0 \iff x<7$, donc la fonction est concave sur $[0;7]$;

$f''(x)>0 \iff x-7>0 \iff x>7$, donc la fonction est convexe sur $[7;60]$.

4. a. G produit de fonctions dérivables sur $[7;60]$ est dérivable et sur cet intervalle :

$G'(x)=-70\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}-\dfrac{1}{5}\times(-70x-560)\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}=-70\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}+(14x+112)\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}=\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}(-70+14x+112)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}(14x+42)=g(x)$, ce qui démontre que G est une primitive de g sur $[0;60]$.

b. Comme pour tout x de $[0;70]$, $f(x)=g(x)+70$, une primitive de f est la fonction $G(x)+70x=70x+(-70x-560)\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$.

c. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^{60} f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[70x+(-70x-560)\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}\right]_0^{60}\\ &=\left(70\times 60+(-70\times 60-560)\,\mathrm{e}^{-\frac{60}{5}}\right)-\left(70\times 0+(-70\times 0-560)\,\mathrm{e}^{-\frac{0}{5}}\right)\\ &=4200-4760\,\mathrm{e}^{-12}-(-560)=4760-4760\,\mathrm{e}^{-12}.\end{aligned}$$

Comme $4760\,\mathrm{e}^{-12}\approx 0{,}03$, on a donc $\displaystyle\int_0^{60} f(x)\,\mathrm{d}x\approx 4760$ à l'unité près.

Partie C

L'ébéniste découpe 2 accoudoirs identiques sur le modèle de la surface hachurée de l'annexe 2 en choisissant comme unité le cm.

Il souhaite vernir les deux faces de chaque accoudoir (**annexe 1**) ainsi que le dossier du fauteuil dont l'aire est égale à 5 400 cm^2. Or il lui reste le quart d'un petit pot de vernis pouvant couvrir 10 m^2.

Il y a 2 accoudoirs à vernir sur les 2 faces, ce qui fait 4 faces en tout. La surface à vernir est, en cm^2, d'environ $4\times 4760+5400=24440$ soit 2,444 m^2.

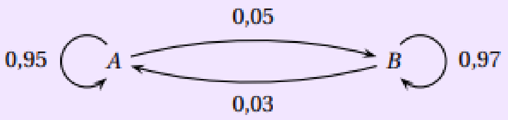
Il a un quart de pot qui couvre 10 m^2 donc il peut vernir 2,5 m^2.

L'ébéniste aura donc assez de vernis.

correction spé :

1. a. Dessiner le graphe probabiliste $(\mathscr{G})$ de sommets A et B.

Solution :



b. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

Solution :

$M=\begin{pmatrix}0{,}95 & 0{,}05\\ 0{,}03 & 0{,}97\end{pmatrix}$

2. Démontrer que $P_1=\begin{pmatrix}0{,}628 & 0{,}372\end{pmatrix}$.

Solution : par définition on a $P_1=P_0M$ avec $P_0=\begin{pmatrix}0{,}65 & 0{,}35\end{pmatrix}$ et $M=\begin{pmatrix}0{,}95 & 0{,}05\\ 0{,}03 & 0{,}97\end{pmatrix}$

donc on a bien $P_1=\begin{pmatrix}0{,}628 & 0{,}372\end{pmatrix}$

3. On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable associé à ce graphe.

a. Démontrer que les nombres a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} 0{,}05a - 0{,}03b &= 0 \\ a + \quad b &= 1 \end{cases}.$$

Solution : $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ est l'état stable si et seulement si $\begin{cases} PM &= P \\ a+b &= 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} PM &= P \\ a+b &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0{,}95a + 0{,}03b &= a \\ 0{,}05a + 0{,}97b &= b \\ a + \quad b &= 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -0{,}05a + 0{,}03b &= 0 \\ 0{,}05a - 0{,}03b &= 0 \\ a + \quad b &= 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0{,}05a - 0{,}03b &= 0 \\ a + \quad b &= 1 \end{cases}$$

b. Résoudre le système précédent.

Solution :

$$\begin{cases} 0{,}05a - 0{,}03b &= 0 \\ a + \quad b &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 5a - 3b &= 0 \\ b &= 1 - a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5a - 3(1-a) &= 0 \\ b &= 1 - a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a &= 0{,}375 \\ b &= 0{,}625 \end{cases}$$

c. Interpréter dans le contexte de l'exercice la solution obtenue à la question **3. b.**

Solution :

Au bout d'un certain nombre de mois, la probabilité qu'un adhérent déclare voter pour le candidat A se stabilisera à 0,375

donc le candidat A peut espérer 37,5% des voix et B peut en espérer 62,5%

4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0{,}92a_n + 0{,}03$.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n M$ soit $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}03 & 0{,}97 \end{pmatrix}$

donc $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}03b_n = 0{,}95a_n + 0{,}03(1 - a_n)$

On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}92a_n + 0{,}03$

b. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 0{,}375$.

Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}92$ et préciser le premier terme.

Solution :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} &= a_{n+1} - 0{,}375 \\ &= 0{,}92a_n + 0{,}03 - 0{,}375 \\ &= 0{,}92a_n - 0{,}345 \\ &= 0{,}92(a_n - 0{,}375) \\ &= 0{,}92v_n \end{aligned}$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}92$ et de premier terme $v_0 = a_0 - 0{,}375 = 0{,}275$.

c. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et en déduire que : $a_n = 0{,}275 \times 0{,}92^n + 0{,}375$.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 0{,}275 \times 0{,}92^n$ or $v_n = a_n - 0{,}375$ soit

$a_n = v_n + 0{,}375$

on en déduit $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0{,}275 \times 0{,}92^n + 0{,}375$