Première heure : Utilisation de la formule $uv \rightarrow u'v + uv'$

$f(x) = (3x-5)(7x+2)$

Je reconnais $uv \rightarrow u'v + uv'$ Avec $u = 3x-5 \quad u' = 3$

$v = 7x+2 \quad v' = 7$

Donc $f'(x) = 3(7x+2) + (3x-5)7$

$= 21x + 6 + 21x - 35 = 42x - 29$

$g(x) = (3x^2 - 5x + 3)\frac{4}{x^2}$

Je reconnais $uv \rightarrow u'v + uv'$ Avec $u = 3x^2 - 5x + 3 \quad u' = 6x - 5$

$v = \frac{4}{x^2} = 4\frac{1}{x^2} \quad v' = 4\frac{-2}{x^3} = \frac{-8}{x^3}$

Donc $g'(x) = (6x-5)\frac{4}{x^2} + (3x^2 - 5x + 3)\frac{-8}{x^3}$

$= \frac{24}{x} - \frac{20}{x^2} + 3x^2\frac{-8}{x^3} - 5x\frac{-8}{x^3} + 3\frac{-8}{x^3}$

$= \frac{24}{x} - \frac{20}{x^2} + \frac{3x^2}{1}\frac{-8}{x^3} - \frac{5x}{1}\frac{-8}{x^3} + \frac{3}{1}\frac{-8}{x^3}$

$= \frac{24}{x} - \frac{20}{x^2} + \frac{-24x^2}{x^3} + \frac{40x}{x^3} + \frac{-24}{x^3}$

$= \frac{24}{x} - \frac{20}{x^2} - \frac{24}{x} + \frac{40}{x^2} - \frac{24}{x^3}$

$= \frac{20}{x^2} - \frac{24}{x^3}$

Bonus non vu en classe

Si on vous demandais d'étudier les variations de la fonction que l'on vient de dériver, alors il faudrait étudier le signe de la dérivée que l'on vient de trouver

$g'(x) = \frac{20}{x^2} - \frac{24}{x^3}$

Trouver le signe d'une telle expression est loin d'être évident, on a besoin de la compacter c'est-à-dire de la mettre sous la forme d'un quotient ou d'un produit de facteurs simples.

$g'(x) = \frac{20x}{x^3} - \frac{24}{x^3} = \frac{20x-24}{x^3}$

$20x - 24 \geq 0 \Leftrightarrow 20x \geq 24$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{24}{20} \Leftrightarrow x \geq \frac{6}{5}$

x^3 est du signe de x,

Justification (non demandée)

c'est le produit de trois facteurs valant x, et le produit de trois facteurs négatifs est un nombre négatif et le produit de trois nombres positifs est un nombre positif.

x	$-\infty$		0		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
$20x-24$		$-$		$-$	0	$+$	
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

$h(x) = \left(7x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{5}{2x} - \frac{3}{4x^2}\right)$

Je reconnais $uv \rightarrow u'v + uv'$

Avec $u = 7x^2 + \frac{x^3}{3} = 7x^2 + \frac{1}{3}x^3 \quad u' = 14x + \frac{1}{3}3x^2 = 14x + x^2$

$v = \frac{5}{2x} - \frac{3}{4x^2} = \frac{5}{2}\frac{1}{x} - \frac{3}{4}\frac{1}{x^2} \quad v' = \frac{5}{2}\frac{-1}{x^2} - \frac{3}{4}\frac{-2}{x^3}$

Donc $h'(x) = (14x + x^2)\left(\frac{5}{2x} - \frac{3}{4x^2}\right) + \left(7x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{5}{2}\frac{-1}{x^2} - \frac{3}{4}\frac{-2}{x^3}\right)$

$$= (14x + x^2)\left(\frac{5}{2x} - \frac{3}{4x^2}\right) + \left(7x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{-5}{2x^2} - \frac{-6}{4x^3}\right)$$

$$= \frac{70x}{2x} - \frac{42x}{4x^2} + \frac{5x^2}{2x} - \frac{3x^2}{4x^2} + \frac{-35x^2}{2x^2} - \frac{-42x^2}{4x^3} + \frac{-5x^3}{6x^2} - \frac{-6x^3}{12x^3}$$

$$= 35 - \frac{21}{2x} + \frac{5x}{2} - \frac{3}{4} - \frac{35}{2} + \frac{21}{2x} - \frac{5x}{6} + \frac{1}{2}$$
$$= x\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{6}\right) + 35 - \frac{3}{4} - \frac{35}{2} + \frac{1}{2} = x\left(\frac{15}{6} - \frac{5}{6}\right) + \frac{140}{4} - \frac{3}{4} - \frac{70}{4} + \frac{2}{4} = x\frac{10}{6} + \frac{69}{4} = \frac{5}{3}x + \frac{69}{4}$$

Deuxième heure : Utilisation de la formule $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f(x) = \frac{x^2}{3x+2}$ sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

Je reconnais $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$ Avec $u = x^2$ $u' = 2x$

$v = 3x + 2$ $v' = 3$

$$f'(x) = \frac{2x(3x+2) - x^2 3}{(3x+2)^2} = \frac{6x^2 + 4x - 3x^2}{(3x+2)^2} = \frac{3x^2 + 4x}{(3x+2)^2} = \frac{x(3x+4)}{(3x+2)^2}$$

$g(x) = \frac{x^2-5x+2}{x-1}$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$

Je reconnais $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$ Avec $u = x^2 - 5x + 2$ $u' = 2x - 5$

$v = x - 1$ $v' = 1$

$$g'(x) = \frac{(2x-5)(x-1) - (x^2 - 5x + 2)1}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x^2 - 2x - 5x + 5 - x^2 + 5x - 2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}$$

$h(x) = \frac{8-4x}{7-3x}$ sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{7}{3}\right\}$

Je reconnais $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$ Avec $u = 8 - 4x$ $u' = -4$

$v = 7 - 3x$ $v' = -3$

$$h'(x) = \frac{-4(7-3x) - (8-4x)(-3)}{(7-3x)^2}$$
$$= \frac{-28 + 12x - (-24 + 12x)}{(7-3x)^2} = \frac{-28 + 12x + 24 - 12x}{(7-3x)^2} = \frac{-4}{(7-3x)^2}$$

x	$-\infty$		0		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
$20x-24$		$-$		$-$	0	$+$	
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$							