Contrôle : fonctions et exponentielle

Exercice 1

1) Résoudre les équations et inéquations suivantes :
   a. $\frac{e^{5x+3}}{e^{-2x+4}} < e^{3x}e^{-5}$
   b. $e^{4x-7} = 1$
   c. $e^{-x^2+5x+3} \geq -5$
2) Résoudre : $x^2 - 13x + 40 = 0$ et en déduire les solutions de $e^{x^2-29x} \geq (e^{4x+10})^{-4}$

Exercice 2

Soit f la fonction qui a tout réel x de l'intervalle $[0; 10]$ associe le réel $f(x) = e^{-3x}(x^2 - 5x + 3)$

<u>Partie A</u>

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f
2) Après avoir déterminé la valeur exacte puis l'approximations à 10^{-3} près de M, m et w, respectivement le maximum, le minimum local et l'image de 10 par f, vous placerez les trois lettres dans le tableau de variation.
3) Conjecturer le nombre d'antécédent de 2 par f sur $[0; 10]$, puis prouver votre conjecture proprement.

<u>Partie B</u>

1) Prouver que la dérivée seconde de f est :
   $$f''(x) = e^{-3x}(9x^2 - 57x + 59)$$
2) Donner la convexité de f sur $[0; 10]$, en précisant le ou les points d'inflexion.
3) Que peut-on dire de la position de la courbe représentative de f par rapport à ses tangentes sur l'intervalle $[2; 5]$

www.dimension-k.com

Contrôle : fonctions et exponentielle

Exercice 1

1) Résoudre les équations et inéquations suivantes :
   a. $\frac{e^{5x+3}}{e^{-2x+4}} < e^{3x}e^{-5}$
   b. $e^{4x-7} = 1$
   c. $e^{-x^2+5x+3} \geq -5$
2) Résoudre : $x^2 - 13x + 40 = 0$ et en déduire les solutions de $e^{x^2-29x} \geq (e^{4x+10})^{-4}$

Exercice 2

Soit f la fonction qui a tout réel x de l'intervalle $[0; 10]$ associe le réel $f(x) = e^{-3x}(x^2 - 5x + 3)$

Partie A

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f
2) Après avoir déterminé la valeur exacte puis l'approximations à 10^{-3} près de M, m et w, respectivement le maximum, le minimum local et l'image de 10 par f, vous placerez les trois lettres dans le tableau de variation.
3) Conjecturer le nombre d'antécédent de 2 par f sur $[0; 10]$, puis prouver votre conjecture proprement.

Partie B

1) Prouver que la dérivée seconde de f est :
   $$f''(x) = e^{-3x}(9x^2 - 57x + 59)$$
2) Donner la convexité de f sur $[0; 10]$, en précisant le ou les points d'inflexion.
3) Que peut-on dire de la position de la courbe représentative de f par rapport à ses tangentes sur l'intervalle $[2; 5]$

Correction

Exercice 1

1) Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$\frac{e^{5x+3}}{e^{-2x+4}} < e^{3x}e^{-5}$ ⇔ $e^{(5x+3)-(-2x+4)} < e^{3x-5}$

⇔ $5x+3+2x-4 < 3x-5$ ⇔ $7x-1 < 3x-5$

⇔ $7x-3x < 1-5$ ⇔ $\frac{4x}{4} < -\frac{4}{4}$ ⇔ $x < -1$ $S =]-\infty; -1[$

$e^{4x-7} = 1$ ⇔ $e^{4x-7} = e^0$ ⇔ $4x-7=0$ ⇔ $4x = 7$ ⇔ $x = \frac{7}{4}$

$e^{-x^2+5x+3} \geq -5$ comme l'exponentielle est toujours positive, alors quel que soit ,
e^{-x^2+5x+3} le sera aussi et donc $e^{-x^2+5x+3} \geq 0$ ainsi $S = \mathbb{R}$

2) Résoudre : $x^2 - 13x + 40 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \times 1 \times 40 = 169 - 160 = 9$ ainsi $\Delta > 0$ et donc l'équation aura deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13-\sqrt{9}}{2} = 5 \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13+\sqrt{9}}{2} = 8$$

$e^{x^2-29x} \geq (e^{4x+10})^{-4}$ ⇔ $e^{x^2-29x} \geq e^{-16x-40}$ ⇔ $x^2 - 29x \geq -16x - 40$

⇔ $x^2 - 29x + 16x + 40 \geq 0$ ⇔ $x^2 - 13x + 40 \geq 0$

On sait que le polynôme s'annule en 5 et 8, que le coefficient de l'élément de degré 2 est positif (il vaut 1) donc $S =]-\infty; 5] \cup [8; +\infty[$

Exercice 2

Partie 1

1) $(x) = e^{-3x}(x^2 - 5x + 3)$, je reconnais $uv \to u'v + uv'$ avec :

$u = e^{-3x}$, $u' = -3e^{-3x}$, $v = x^2 - 5x + 3$ et $v' = 2x - 5$ et donc :

$f'(x) = -3e^{-3x}(x^2-5x+3) + e^{-3x}(2x-5) = e^{-3x}\left(-3(x^2-5x+3) + (2x-5)\right)$

$= e^{-3x}\left(-3(x^2-5x+3) + (2x-5)\right) = e^{-3x}(-3x^2 + 15x - 9 + 2x - 5)$

$= e^{-3x}(-3x^2 + 17x - 14)$

Le signe de la dérivée sera celui de $-3x^2 + 17x - 14$ car e^{-3x} étant positif strictement il n'aura d'impact.

$\Delta = b^2 - 4ac = 17^2 - 4 \times (-3)(-14) = 121$

$\Delta > 0$ donc on aura deux racines :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-17-\sqrt{121}}{-6} = \frac{14}{3}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-17+\sqrt{121}}{-6} = \frac{-17+11}{-6} = 1$

$M = f\left(\frac{14}{3}\right) = e^{-3\frac{14}{3}}\left(\left(\frac{14}{3}\right)^2 - 5\frac{14}{3} + 3\right) = \left(\frac{13}{9}\right)e^{-14} \approx 1{,}20 \times 10^{-6} \approx 0{,}000$

$m = f(1) = e^{-3\times 1}(1^2 - 5 \times 1 + 3) = e^{-3}(-1) = -e^{-3} \approx -0{,}050$

$w = f(10) = e^{-3\times 10}(10^2 - 5 \times 10 + 3) = 53e^{-30} \approx 5 \times 10^{-12} \approx 0{,}000$

x	0		1		$\frac{14}{3}$		10
e^{-3x}		+		+		+	
$-3x^2+17x-14$		-	0	+	0	-	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	3	↘	m	↗	M	↘	w

3) sur $[0; 1]$ la fonction est continue (en tant que produit d'une fonction exponentielle par une fonction polynôme) , de plus elle est strictement décroissante (cf le tableau de variations) de plus elle on a : $f(0) = 3 \geq 2 \geq m = f(1)$ donc d'après le corollaire du TVI 2 a un antécédent unique sur $[0; 1]$.

Sur $[1; 10]$ la fonction f a pour maximum $f\left(\frac{14}{3}\right) = m$ or $m < 2$ donc 2 n'aura pas d'antécédent par f sur cet intervalle.

Conclusion : 2 a un antécédent unique sur $[0; 10]$.

Partie 2

1) Dérivons $f'(x) = e^{-3x}(-3x^2 + 17x - 14)$

je reconnais $uv \to u'v + uv'$ avec :

$u = e^{-3x}$, $u' = -3e^{-3x}$, $v = -3x^2 + 17x - 14$ et $v' = -6x + 17$ et donc :

$f''(x) = -3e^{-3x}(-3x^2 + 17x - 14) + e^{-3x}(-6x + 17)$

$= e^{-3x}\left(-3(-3x^2 + 17x - 14) + (-6x + 17)\right)$

$= e^{-3x}(9x^2 - 51x + 42 - 6x + 17) = e^{-3x}(9x^2 - 57x + 59)$

2) Etudions le signe de $9x^2 - 57x + 59$. $\Delta = b^2 - 4ac = (-57)^2 - 4 \times 9 \times 59 = 1125$

$\Delta > 0$ donc le trinôme aura deux racines :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{57-\sqrt{1125}}{18} \approx 1{,}303$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{57+\sqrt{1125}}{18} \approx 5{,}030$

x	0		x_1		x_2		10
e^{-3x}		+		+		+	
$9x^2-57x+59$		+	0	-	0	+	
$f''(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		convexe	|	concave	|	Convexe	

On a des points d'inflexion d'abscisse x_1 et x_2.

3) On a $[2; 5] \subset [x_1; x_2]$ intervalle sur lequel la fonction est concave, on aura donc la courbe sous ses tangentes.

x	0		x_1		x_2		10
e^{-3x}		+		+		+	
$9x^2 - 57x + 59$		+	0	-	0	+	
$f''(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		convexe	|	concave	|	Convexe	

x	0		1		$\frac{14}{3}$		10
e^{-3x}		+		+		+	
$-3x^2 + 17x - 14$		-	0	+	0	-	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	3						