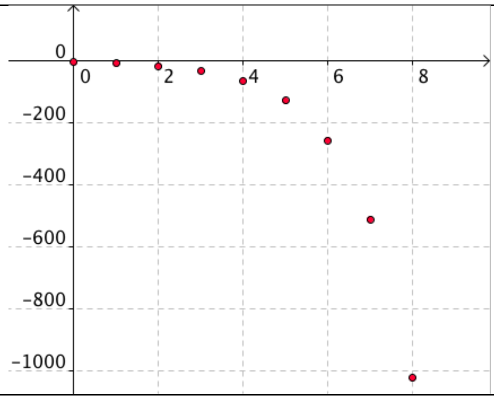
SUITES

I. Rappels sur les suites géométriques

Exemple :
Considérons une suite numérique (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.
Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :
$u_0 = 5$, $u_1 = 10$, $u_2 = 20$, $u_3 = 40$.
Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

La suite introduite plus haut est définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

	(u_n) une **suite géométrique** de **raison** q de premier terme u_0.	**Exemple :** $q=2$ et $u_0=-4$
Définition	$u_{n+1} = q \times u_n$	$u_{n+1} = 2 \times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2.
Propriété	$u_n = u_0 \times q^n$	$u_n = -4 \times 2^n$
Variations	Pour $u_0 > 0$: Si $q > 1$: (u_n) est croissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est décroissante. Pour $u_0 < 0$: Si $q > 1$: (u_n) est décroissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est croissante.	$u_0 = -4 < 0$ $q = 2 > 1$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Si $q < 0$: la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante.	

Exemple concret :
On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élève à 4%.
Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.
Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On note u_n le capital après n années.
On a ainsi :
$u_1 = 1,04 \times 500 = 520$ $u_2 = 1,04 \times 520 = 540,80$ $u_3 = 1,04 \times 540,80 = 562,432$
De manière générale : $u_{n+1} = 1,04 \times u_n$ avec $u_0 = 500$
On peut également exprimer u_n en fonction de n : $u_n = 500 \times 1,04^n$

II. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a : $1+q+q^2+...+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration de la propriété :

On pose : $S=1+q+q^2+\cdots+q^n$ et donc $qS=q1+q\times q+q\times q^2+\cdots+q\times q^n$

Ainsi $S=1+q+q^2+\cdots+q^n$ et

$q\,S=0+q+q^2+\cdots+q^n+q^{n+1}$

Et donc $S-qS=1-q^{n+1}$ donc on a : $S(1-q)=1-q^{n+1}$ et ainsi $S=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Remarque : Il s'agit de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Méthode : Calculer la somme des termes successifs d'une suite géométrique

Calculer la somme S suivante : $S=1+3+3^2+...+3^{13}$ $S=1+3+3^2+...+3^{13}=\dfrac{1-3^{14}}{1-3}=2391484$

De la même manière on peut montrer que si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors : $u_0+u_1+\cdots+u_n=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et même en poussant un peu : $u_p+u_{p+1}+\cdots+u_n=u_p\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Méthode : Calculer la somme des termes successifs d'une suite géométrique

Un jeune entrepreneur investit un capital de départ de 20 000 € pour son entreprise. Afin de la dynamiser, il injecte chaque mois une somme supplémentaire à son capital, celle-ci diminue de 30% chaque mois.
Calculer le total du capital investi à la fin de la première année.

On note (u_n) le capital injecté au n-ième mois alors $u_{n+1}=0,7u_n$.

(u_n) est donc une suite géométrique de raison q = 0,7 et de premier terme u_0 = 20000.

Le total du capital investit à la fin de la première année est : $2000\times\frac{1-0,7^{12}}{1-0,7}\approx 65744$

III. Limite d'une suite géométrique

1) Suite (q_n)

q	$0<q<1$	$q=1$	$q>1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=$	0	1	$+\infty$

Exemples :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n=+\infty$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4^n+3\right)$?

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4^n+3\right)=+\infty$

2) Suite géométrique positive

Propriété : (u_n) est une suite géométrique positive de raison q et de premier terme non nul u_0.

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.
- Si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration :

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme positif non nul u_0 donc $u_n = u_0 \times q^n$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0 \times \lim\limits_{n\to+\infty} q^n$.

Exemples :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$

$\frac{2^n}{3}$ est le terme général d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{3}$ de raison 2 et $2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3} = +\infty$

b) $3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique positive de raison $\frac{1}{5}$ et or $\frac{1}{5}$<1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n =$ 0 et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) = 1$

3) Algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite (q^n) est inférieure à un nombre réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n$.

Voici un algorithme écrit en langage naturel :

Langage naturel

Entrée
Saisir le réel A
 	
Initialisation
Affecter à n la valeur 0
Affecter à u la valeur 2
 	
Traitement des données
Tant que u > A
    Faire
        Affecter à n la valeur n + 1
        Affecter à u la valeur u/4
 	
Sortie
Afficher n

En appliquant cet algorithme avec A = 0,1, on obtient en sortie n = 3.

A partir du terme u_3, la suite est inférieure à 0,1.

En langage « calculatrice », cela donne :

TI	CASIO
PROGRAM:SEUIL :Input A :0→N :2→U :While U>A :N+1→N :U/4→U :End :Disp N	======SEUIL "A="?→A↵ 0→N↵ 2→U↵ While U>A↵ N+1→N↵ U÷4→U↵ WhileEnd↵ N

IV. Limite de la somme de termes consécutifs

Exemple :

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_0 = 4$

On note $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et on se propose de déterminer la limite de S_n

On sait que $S_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 4\frac{1-0{,}5^{n+1}}{1-0{,}5} = 4\frac{1-0{,}5^{n+1}}{0{,}5} = 8(1-0{,}5^{n+1}) = 8 - 8 \times 0{,}5^{n+1}$

$8 \times 0{,}5^{n+1}$ est le terme général d'une suite géométrique positive dont la raison $0{,}5$ est inférieure à 1 donc elle converge vers 0 et donc (S_n) converge vers 8

V. Etude d'une suite arithmético-géométrique

Définition : Une suite (u_n) est dite arithmético-géométrique s'il existe deux nombres a et b tels que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = au_n + b$.

Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3% par an. Chaque année suivante, il dépose 300€ de plus. On note (u_n) la somme épargnée à l'année n.
On a alors : $u_{n+1} = 1,03u_n + 300$ et $u_0 = 5000$
La suite (u_n) est arithmético-géométrique.

1) À l'aide du tableur, calculer la somme totale épargnée à la $10^{\text{ème}}$ année.
2) Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 10000$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.
3) Exprimer v_n en fonction de n.
4) En déduire u_n en fonction de n. Retrouver alors le résultat de la question 1 par calcul.
5) Etudier les variations de (u_n).
6) Calculer la limite de (u_n).

1) Avec le tableur, on obtient :

B2 =1,03*B1+300

	A	B	C	D
1	Année 0	5000		
2	Année 1	5450		
3	Année 2	5913,5		
4	Année 3	6390,905		
5	Année 4	6882,6322		
6	Année 5	7389,1111		
7	Année 6	7910,7844		
8	Année 7	8448,108		
9	Année 8	9001,5512		
10	Année 9	9571,5978		
11	Année 10	10158,746		

La somme totale épargnée à la $10^{\text{ème}}$ année est égale à environ 10158,75 €.

2)
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 10000 \\ &= 1,03u_n + 300 + 10000 \\ &= 1,03u_n + 10300 \\ &= 1,03\left(u_n + 10000\right) \\ &= 1,03v_n \end{aligned}$$
Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme $v_0 = u_0 + 10000 = 5000 + 10000 = 15000$.

3) Pour tout n, $v_n = 15000 \times 1,03^n$.

4) Pour tout n, $u_n = 15000 \times 1,03^n - 10000$. On a alors : $u_{10} = 15000 \times 1,03^{10} - 10000 \approx 10158,75$

5) Pour tout n,
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 15000 \times 1,03^{n+1} - 10000 - \left(15000 \times 1,03^n - 10000\right) \\ &= 15000 \times \left(1,03^{n+1} - 1,03^n\right) \\ &= 15000 \times 1,03^n \times \left(1,03 - 1\right) \\ &= 450 \times 1,03^n > 0 \end{aligned}$$
Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

6) Comme 1,03 > 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,03^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(15000 \times 1,03^n\right) = +\infty$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(15000 \times 1,03^n - 10000\right) = +\infty$, soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

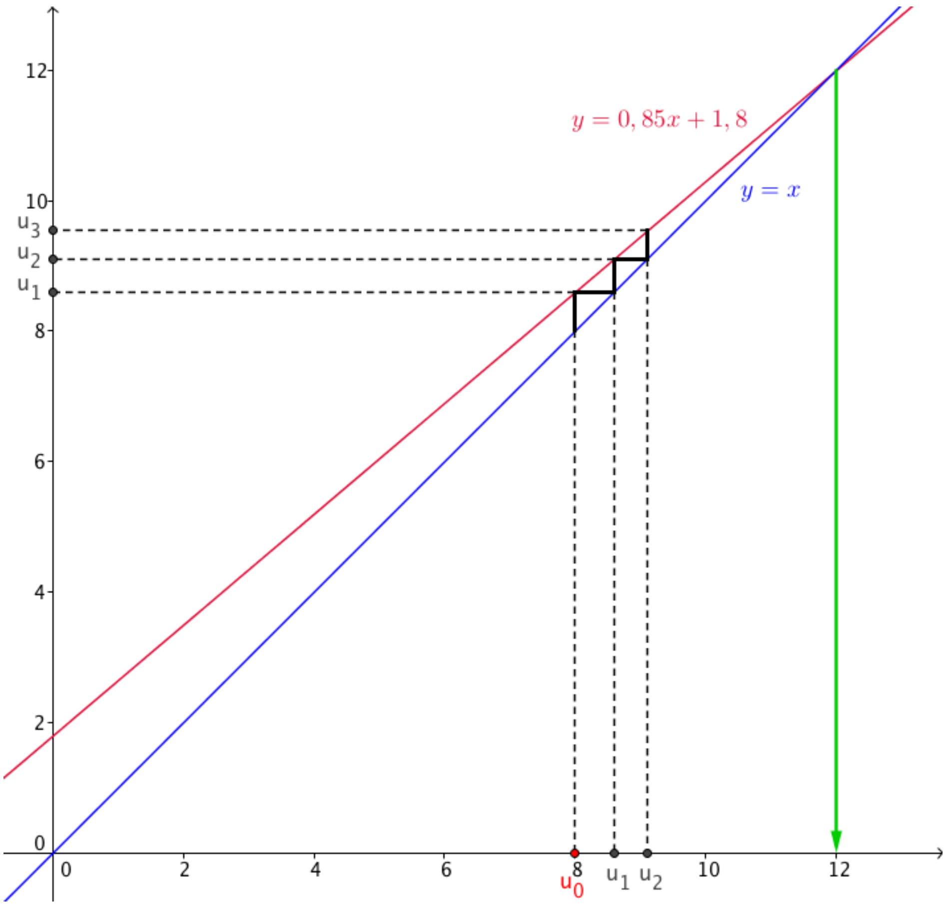
VI. Représentation graphique d'une suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8$.

1) Dans un repère orthonormé, tracer les droites d'équations respectives $y = 0,85x + 1,8$ et $y = x$.
2) Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2 et u_3. On laissera apparent les traits de construction.
3) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).

D'après Bac ES Polynésie 2009

1) 2)



3) En continuant le tracé, celui-ci se rapprocherait de plus en plus de l'intersection des deux droites. On conjecture que la limite de la suite (u_n) est 12.

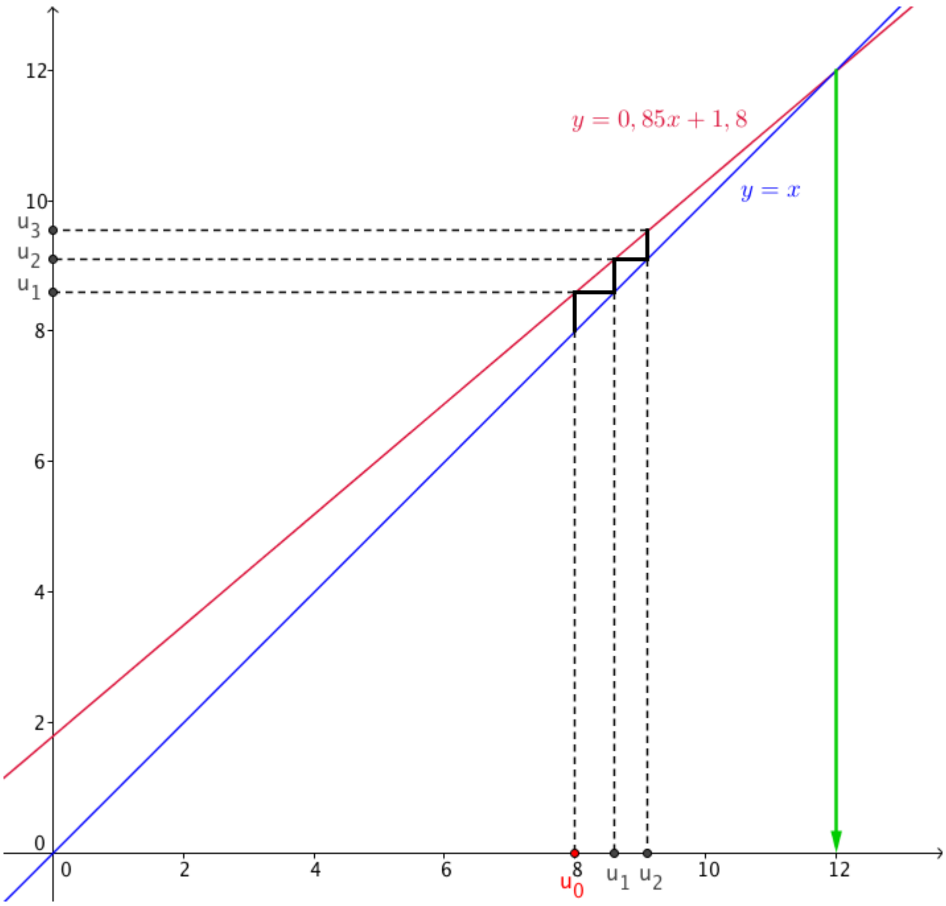
VI. Représentation graphique d'une suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8$.

1) Dans un repère orthonormé, tracer les droites d'équations respectives $y = 0,85x + 1,8$ et $y = x$.
2) Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2 et u_3. On laissera apparent les traits de construction.
3) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).

D'après Bac ES Polynésie 2009

1) 2)



3) En continuant le tracé, celui-ci se rapprocherait de plus en plus de l'intersection des deux droites. On conjecture que la limite de la suite (u_n) est 12.

IV. Quelques exemples pertinents

1) <u>limite d'une somme de suite</u>

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_0 = 4$

On note $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et on se propose de déterminer la limite de S_n

On sait que $S_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 4\frac{1-0,5^{n+1}}{1-0,5} = 4\frac{1-0,5^{n+1}}{0,5} = 8(1-0,5^{n+1}) = 8 - 8 \times 0,5^{n+1}$

$8 \times 0,5^{n+1}$ est le terme général d'une suite géométrique positive dont la raison $0,5$ est inférieure à 1 donc elle converge vers 0 et donc (S_n) converge vers 8

2) <u>étude d'une suite arithmético géométrique</u>

Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3% par an. Chaque année suivante, il dépose 300€ de plus. On note (u_n) la somme épargnée à l'année n.

On a alors : $u_{n+1} = 1,03u_n + 300$ et $u_0 = 5000$ La suite (u_n) est arithmético-géométrique.

1) À l'aide du tableur, calculer la somme totale épargnée à la 10ème année.

2) Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 10000$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.

3) Exprimer v_n en fonction de n.

4) En déduire u_n en fonction de n. Retrouver alors le résultat de la question 1 par calcul.

5) Etudier les variations de (u_n). 6) Calculer la limite de (u_n).

1) Avec le tableur, on obtient :

La somme totale épargnée à la 10ème année vaut environ 10158,75 €.

B2 fx =1,03*B1+300

	A	B	C	D
1	Année 0	5000		
2	Année 1	5450		
3	Année 2	5913,5		
4	Année 3	6390,905		
5	Année 4	6882,6322		
6	Année 5	7389,1111		
7	Année 6	7910,7844		
8	Année 7	8448,108		
9	Année 8	9001,5512		
10	Année 9	9571,5978		
11	Année 10	10158,746		

2) $v_{n+1} = u_{n+1} + 10\,000 = 1,03u_n + 300 + 10\,000$

$= 1,03u_n + 10300$ or comme $v_n = u_n + 10000$ on a : $u_n = v_n - 10000$ et donc : $v_{n+1} = 1,03(v_n - 10\,000) + 10\,300 = 1,03\, v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme $v_0 = u_0 + 10000 = 5000 + 10000 = 15000$.

3) Pour tout n, $v_n = 15000 \times 1,03^n$.

4) Pour tout n, $u_n = 15000 \times 1,03^n - 10000$.

On a alors : $u_{10} = 15000 \times 1,03^{10} - 10000 \approx 10158,75$

5) Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 15000 \times 1,03^{n+1} - 10\,000 - \left(15000 \times 1,03^n - 10\,000\right)$

$= 15000 \times (1,03^{n+1} - 1,03^n) = 15000 \times (1,03^n 1,03 - 1,03^n \times 1) = 15000 \times 1,03^n(1,03 - 1)$

$= 15000 \times 1,03^n \times 0,03 > 0$ Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

6) Comme 1,03 > 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,03^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(15000 \times 1,03^n\right) = +\infty$ Et donc

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(15000 \times 1,03^n - 10000\right) = +\infty$, soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) <u>Algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite (q^n) est inférieure à un nombre réel A :</u>

On considère la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n \end{cases}$

A droite l'algorithme, en dessous le programme correspondant

Langage naturel	
Entrée :	Saisir le réel A
Initialisation	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Traitement des données	
Tant que u > A	
	Affecter à n la valeur n + 1
	Affecter à u la valeur u/4
Fin tant que	
Sortie	Afficher n

TI

```
PROGRAM:SEUIL
:Input A
:0→N
:2→U
:While U>A
:N+1→N
:U/4→U
:End
:Disp N
```

CASIO

```
======SEUIL
"A="?→A↵
0→N↵
2→U↵
While U>A↵
N+1→N↵
U÷4→U↵
WhileEnd↵
N
```

En appliquant cet algorithme avec A = 0,1, on obtient en sortie n = 3.

A partir du terme u_3, la suite est inférieure à 0,1.