R.O.C (2012-2013)

Suites

- Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :
  - u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang ;
  - u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

  Alors v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

Soit (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir du rang n_0 et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
Soit A un seuil réel, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ il existe un rang n_1 à partir duquel on a $u_n \geq A$
Soit n_2 un entier supérieur à n_0 et n_1 alors $\forall n \geq n_2$ on aura $n \geq n_0$ donc $u_n \leq v_n$ et $n \geq n_1$ donc $u_n \geq A$ et ainsi $v_n \geq u_n \geq A$ donc (v_n) tend bien vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

- Démontrer que si une suite est croissante et admet pour limite l, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à l

Par l'absurde : supposons qu'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > l$.
Soit a et b deux réels tels que : $a < l < b < u_{n_0}$ donc $]a; b[$ est un intervalle ouvert contenant l
$\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0} > l$ donc il n'existe pas de rang à partir duquel on ait tous les termes dans $]a; b[$ ce qui contredit le fait que u_n converge vers l. Donc on ne peut avoir de terme supérieur strictement à l.

- Démontrer que la suite (q^n), avec $q > 1$, a pour limite $+\infty$

Prérequis : on sait que pour tout réel positif a on a pour tout n : $(1+a)^n \geq 1 + an$
Soit $q > 1$, on pose $a = q - 1$ on a donc $a > 0$ et donc pour tout n : $(1+a)^n \geq 1 + an$ donc pour tout n : $q^n \geq 1 + an$
comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + an = +\infty$ car a est positif donc par théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

- Démontrer qu'une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$

Soit (u_n) une suite croissante non majorée. Soit A un réel, (u_n) étant non majorée il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > A$. (u_n) étant croissante $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0} > A$. Ceci étant valable pour tout réel A la suite est par définition une suite tendant vers $+\infty$ quand n tends vers $+\infty$

Exponentielle

- Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0

Soit f et g deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à leur dérivée respective et valant 1 en 0
Partie 1 : montrons que f ne peut s'annuler. Soit $h(x) = g(x)g(-x)$ alors h est dérivable et $h'(x) = g'(x)g(-x) - g(x)g'(-x) = g(x)g(-x) - g(x)g(-x)$ car g est égale à sa dérivée donc $h'(x) = 0$ donc h est une fonction constante, or $h(0) = g(0)g(-0) = 1 \times 1 = 1$ si il existait un nombre annulant g alors il annulerait aussi h ce qui est impossible donc g ne s'annule jamais.
Vu qu'elle est continue et positive en 0 et qu'elle ne peut s'annuler elle sera strictement positive sur $\mathbb{R}$
Partie 2 : montrons que $\frac{f}{g}$ est constante.
En tant que quotient de fonction dérivable et non nulles $\frac{f}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{fg - fg}{g^2} = 0$
De plus $\frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1}$ donc $\frac{f}{g}$ est une fonction constante valant 1 pour tout réel x. donc $f = g$ D'où l'unicité.

- Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(x) = e^x - x$. On aura alors $f'(x) = e^x - 1$
La fonction e^x étant croissante f' sera négative avant $f'(0) = e^0 - 1 = 0$ et positive après et donc f sera décroissante avant 0 et croissante après. De plus $f(0) = 1$ donc sur $\mathbb{R}^+$ $f(x) > 0$ donc $e^x > x$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par comparaison $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty}$.

$e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ or $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{y\to+\infty} e^y = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0}$

- Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. On aura alors $f'(x) = e^x - x$ d'après la démonstration précédente on sait que f' est positive sur $\mathbb{R}^+$ donc f est croissante sur cet intervalle.
De plus $f(0) = 1$ donc sur $\mathbb{R}_*^+$ on aura $f(x) > 1$ donc $e^x - \frac{x^2}{2} > 0$ donc $e^x > \frac{x^2}{2}$ donc $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc par comparaison $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$

$xe^x = -1\frac{-x}{e^{-x}}$ or $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -1\frac{-x}{e^{-x}} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0}$

Intégration

Pour les deux demonstrations on se placera dans le contexte ou F définie sur [a ;b] par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est définie quand f est positive sur $[a; b]$ comme l'aire entre l'axe des abscisses , la courbe représentative de f et les verticales d'équation coupant l'axe des abscisses en a et en x

- Démontrer le théorème : « si une fonction f est continue et positive sur $[a; b]$, la fonction F définie sur [a ;b] par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur [a ;b] et a pour dérivée f » dans le cas ou f est croissante.

Soit une fonction f est continue, positive et croissante sur $[a; b]$,
Soit $x_0 \in [a; b]$ et h un réel non nul tel que $x_0 + h \in [a; b]$ (h peut être positive ou pas)

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{a} f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h}$$

Si $h > 0$
alors $a \le x_0 < x_0 + h \le b$ et vu que f est croissante sur $[a; b]$ donc sur $[x_0;\ x_0 + h]$, on aura ainsi:
$f(x_0) \le f(t) \le f(x_0 + h)$ donc $\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt \le \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \le \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0 + h)\,dt$
Donc $f(x_0)\big((x_0 + h) - x_0\big) \le \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \le f(x_0 + h)\big((x_0 + h) - x_0\big)$
Donc $f(x_0)h \le \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \le f(x_0 + h)h$ donc $f(x_0) \le \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h} \le f(x_0 + h)$
Donc $f(x_0) \le \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{(x_0+h)-x_0} \le f(x_0 + h)$
Or $\lim\limits_{h\to0^+} f(x_0 + h) = \lim\limits_{h\to0^+} f(x_0) = f(x_0)$ donc $\lim\limits_{h\to0^+} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = f(x_0)$
Si $h < 0$
alors $a \le x_0 + h < x_0 \le b$ et vu que f est croissante sur $[a; b]$ donc sur $[x_0 + h;\ x_0]$ on aura ainsi :
$f(x_0 + h) \le f(t) \le f(x_0)$ donc $\int_{x_0+h}^{x_0} f(x_0 + h)\,dt \le \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,dt \le \int_{x_0+h}^{x_0} f(x_0)\,dt$
Donc $f(x_0 + h)\big(x_0 - (x_0 + h)\big) \le \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,dt \le f(x_0)\big(x_0 - (x_0 + h)\big)$
Donc $f(x_0 + h)(-h) \le \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,dt \le f(x_0)(-h)$ donc $f(x_0 + h) \le \frac{\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)dt}{-h} \le f(x_0)$
donc $f(x_0 + h) \le \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h} \le f(x_0)$

Donc $f(x_0+h) \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{(x_0+h)-x_0} \leq f(x_0)$

Or $\lim\limits_{h\to 0^-} f(x_0+h) = \lim\limits_{h\to 0^-} f(x_0) = f(x_0)$ donc $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = f(x_0)$

Ainsi : $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = f(x_0)$ donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$

- Démontrer le théorème : « si une fonction f est continue sur un intervalle I alors elle admet des primitives » dans le cas où I est fermé et borné et f admet un minimum.

On vient de prouver que $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ était une primitive de f quand f est positive dans un intervalle $[a;b]$ contenant x.
On va montrer que f n'a pas besoin d'être positive pour avoir une intégrale. On se placera toute fois encore dans un cas particulier : f est continue sur un intervalle $I = [a;b]$ et elle admet un minimum m sur cet intervalle.
Sous ses hypothèses, on définit la fonction g qui pour tout x de I vaut $g(x) = f(x) - m$ donc
On sait que sur I on a $f(x) \geq m$ donc $f(x) - m \geq 0$ donc la fonction g est positive, de plus vu que f est continue elle le sera aussi et donc elle admet une primitive sur I : $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$
En posant $F(x) = G(x) + mx$ on a sur I $F'(x) = G'(x) + m = g(x) + m = f(x)$
Donc F est une primitive de f sur I

Géométrie dans l'expace

- Démontrer le théorème du toit : « Si une droite d'est parallèle à deux plans sécants P_1 et P_2, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection d. » ou encore « Ou si on a deux droites parallèles d_1 et d_2, un plan P_1 contenant d_1, un plan P_2 contenant d_2 et P_1 et P_2 sécants suivant une droite d alors l'intersection d des deux plans est parallèle aux droites d_1 et d_2. »

Par l'absurde : Supposons que les plans sécants et P_2 passant par les droites parallèles d_1 et d_2 se coupent selon une droite d non parallèle à d_1 et d_2.

d et d_1 sont deux droites du plan P_1 et ne sont pas parallèles donc elles se coupent en un point noté A. Ce point étant sur la droite d'intersection des deux plans P_1 et P_2 il sera aussi sur P_2. Ainsi d_1 est une droite passant par un point de P_2 et parallèle à d_2 une droite de ce même plan, donc elle doit elle aussi être sur P_2 donc d_1 est la droite d'intersection et donc elle est confondue avec d ce qui contredit notre supposition : d n'est pas parallèle à d_1. Cette supposition ne peut donc qu'être fausse.

Conclusion : la droite d'intersection est parallèle à d_1 et d_2

- Savoir caractériser les points d'un plan de l'espace par une relation $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b et c trois réels non tous nuls.

Methode de caractérisation :
Si on connais les coordonnées de trois points non alignés, on peut en déduire les coordonnées de deux vecteurs non colinéaires du plans. A l'aide de ces coordonnées et de celle d'un point on peut en déduire un système d'équations paramétriques caractérisant le plan. $\begin{cases} x = x_A + x_{\vec{u}}t + x_{\vec{v}}t' \\ y = y_A + y_{\vec{u}}t + y_{\vec{v}}t' \\ z = z_A + z_{\vec{u}}t + z_{\vec{v}}t' \end{cases}$
En travaillant sur deux lignes il faut isoler t et t', puis dans la troisième ligne il faut substituer à t et t' les expressions trouvées. On aboutit à un une équations ne contenant plus les deux paramètres : c'est une équation cartésienne.

- Démontrer qu'une droite est orthogonale a toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Sens direct : Si elle est orthogonale à toutes les droites du plan elle le sera forcément pour deux d'entre elles.

Réciproquement : supposons que Δ de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale à deux droites d_1 et d_2 du plan de vecteurs directeurs respectifs : $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. Soit d une droite du plan de vecteur directeur $\vec{u}$, alors il existe un unique couple de réels a et b tels que $\vec{u} = a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}$. On aura donc $\vec{n}.\vec{u} = \vec{n}.(a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}) = a\vec{n}.\overrightarrow{u_1} + b\vec{n}.\overrightarrow{u_2}$
Donc $\vec{n}.\vec{u} = a0 + b0$ car $\vec{n}$ est orthogonale à $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ donc $\vec{n}.\vec{u} = 0$ donc Δ est orthogonale à d.
Conclusion Δ est bien orthogonale à toute droite du plan.

Probabilités

- Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour $\bar{A}$ et B.

Supposons que A et B sont indépendants.
$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ formule de probabilité (A et $\bar{A}$ réalisent une partition de l'univers)
$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A)P(B)$ car A et B sont indépendants
$P(\bar{A} \cap B) = P(B)\big(1 - P(A)\big) = P(B)P(\bar{A})$ donc $\bar{A}$ et B sont indépendants.

- Démontrer que l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ alors :
$E(X) = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^t x\lambda e^{-\lambda x}\, dx$
Première partie : gérer l'intégrale
Version 1 : On peut régler ça rapidement avec une Intégration par partie en sélectionnant $u(x) = x$ et $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
Version 2 : L'intégration par partie n'est pas au programme donc voici une méthode à la noix qui est bien dans le cadre du programme : comment intégrer $g(x) = (0 + 1x)\lambda e^{-\lambda x}$? comme on ne sait pas faire, on peut essayer de comprendre ce qui se passe quand on dérive, ça nous donnera des idées pour intégrer :
$g'(x) = \lambda e^{-\lambda x} - x\lambda^2 e^{-\lambda x} = (\lambda - x\lambda^2)e^{-\lambda x}$ donc quand on dérive on a encore la même forme : une fonction affine multipliée par $e^{-\lambda x}$ on peut donc supposer qu'une primitive de g sera :
$G(x) = (ax + b)\, e^{-\lambda x}$ dérivons : $G'(x) = ae^{-\lambda x} - (ax + b)\lambda\, e^{-\lambda x} = (a + \lambda b - \lambda ax)e^{-\lambda x}$

$G'(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a + \lambda b = 0 \\ -\lambda a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{a}{\lambda} \\ a = \frac{1}{-\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{\lambda^2} \\ a = \frac{1}{-\lambda} \end{cases}$ ainsi $G(x) = \left(\frac{-x}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right)\, e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda^2}(1 - x\lambda)\, e^{-\lambda x}$

est une primitive de g et donc $E(X) = \left[\frac{1}{\lambda^2}(1 - x\lambda)\, e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \lim\limits_{t\to+\infty} \left[\frac{1}{\lambda^2}(1 - x\lambda)\, e^{-\lambda x}\right]_0^t$
Partie 2 : gérer la limite
$E(X) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{\lambda^2}(1 - t\lambda)\, e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda^2}(1 - 0\lambda)\, e^{-\lambda 0}\right) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} - t\lambda\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\right)$
$= \lim\limits_{t\to+\infty} \left(\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{t\lambda}{e^{\lambda t}} + \frac{1}{\lambda}\right)$

$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} -\lambda t = -\infty \\ \lim\limits_{y\to-\infty} \frac{e^y}{\lambda^2} = 0 \end{cases}$ donc par composition $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} = 0$

$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} \lambda t = +\infty \\ \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty \end{cases}$ donc par composition $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda t} = +\infty$ donc par inverse et produit $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{\lambda^2}\frac{t\lambda}{e^{\lambda t}} = 0$

Donc $E(X) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{t\lambda}{e^{\lambda t}} + \frac{1}{\lambda}\right) = 0 + 0 + \frac{1}{\lambda}$

- Démontre que $\forall\alpha \in]0;1[,\ \exists!\ u_\alpha > 0, P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$

Par symétrie de la courbe de f :
$P(-u \leq X \leq u) = 2\,P(0 \leq X \leq u) = 2\int_0^u f(x)dx = 2G(u)$
où G est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
G est continue et strictement croissante (car f>0) sur $]0;+\infty[$.
De plus $\lim\limits_{u\to+\infty} G(u) = \frac{1}{2}$ car cela correspond à l'aire sous la courbe de f sur $[0;+\infty[$
D'où le tableau de variation ci-contre de 2G.

t	0	$+\infty$
2G(t)	0 ↗	1

Pour tour réel α de $]0;1[$, $1-\alpha$ sera aussi dans $]0;1[$ donc d'après la conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $u_\alpha > 0$ tel que :
$2G(u_\alpha) = 1-\alpha$ donc tel que c'est-à-dire : $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1-\alpha$

- Démontrer que si la variable aléatoire X_n suit la loi $\mathcal{B}(n;p)$ alors $\forall\alpha \in]0;1[$,on a :
  $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$ avec $I_n = \left[p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

On sait que si Z suit une loi $\mathcal{N}(0;1)$ pour tout nombre α compris entre 0 et 1 il existe un unique nombre u_α tel que : $P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1-\alpha$

Et donc d'après le théorème de Moivre Laplace on sait que $P\left(-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha\right)$ converge vers $P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha)$ cherchons maintenant l'intervalle de fluctuation encadrant $F_n = \frac{X_n}{n}$

$$P\left(-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha\right) = P\left(-u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leq X_n - np \leq u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\right)$$

$$= P\left(-u_\alpha\sqrt{np(1-p)} + np \leq X_n \leq u_\alpha\sqrt{np(1-p)} + np\right)$$

$$= P\left(\frac{np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)}}{n} \leq \frac{X_n}{n} \leq \frac{np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)}}{n}\right) = P\left(p - \frac{u_\alpha\sqrt{np(1-p)}}{n} \leq \mathrm{F_n} \leq p + \frac{u_\alpha\sqrt{np(1-p)}}{n}\right)$$

Ainsi $P\left(p - u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \mathrm{F_n} \leq p + u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ converge vers $P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1-\alpha$

Estimation

- Avec X_n suit la loi $\mathcal{B}(n;p)$ on pose $F_n = \frac{X_n}{n}$ pour n assez grand $P\left(p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geq 0{,}95$

On sait que si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ autrement dit à partir d'un entier n_0 alors $F_n = \frac{X_n}{n}$ admettra comme intervalle de fluctuation au seuil de 95% : $\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$

Soit f la fonction définie sur $]0;1[$ par $f(p) = 1{,}96\sqrt{p(1-p)}$ on aura donc $f'(p) = \frac{1{,}96(1-2p)}{\sqrt{p(1-p)}}$

On en déduit que la fonction est croissante jusqu'à ½ et décroissante après donc elle culmine en ½ pour lequel elle prend la valeur $\frac{1{,}96}{2}$ qui est plus petite que 1 donc $\forall p \in]0;1[$ $1{,}96\sqrt{p(1-p)} < 1$ et donc

$1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\frac{-1}{\sqrt{n}} < -1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ et donc $\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \subset \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

donc $0{,}95 \leq P\left(F_n \in \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]\right) < P\left(F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right)$ (inégalité stricte car l'inclusion est stricte) **Conclusion** pour $\forall n \geq n_0, P\left(F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) > 0{,}95$