R.O.C (2012-2013)

Suites

- Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :
  - u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang ;
  - u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

  Alors v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

- Démontrer que si une suite est croissante et admet pour limite l, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à l

- Démontrer que la suite (q^n), avec $q > 1$, a pour limite $+\infty$

- Démontrer qu'une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$

Exponentielle

- Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0

- Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Intégration

- Démontrer le théorème : « si une fonction f est continue et positive sur $[a; b]$, la fonction F définie sur [a ;b] par $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ est dérivable sur [a ;b] et a pour dérivée f » dans le cas ou f est croissante.

- Démontrer le théorème : « si une fonction f est continue sur un intervalle I alors elle admet des primitives » dans le cas où I est fermé et borné et f admet un minimum.

Géométrie dans l'expace

- Démontrer le théorème du toit : « Si une droite *d'* est parallèle à deux plans sécants P_1 et P_2 , alors elle est parallèle à leur droite d'intersection *d*. » ou encore « Ou si on a deux droites parallèles d_1 et d_2, un plan P_1 contenant d_1, un plan P_2 contenant d_2 et P_1 et P_2 sécants suivant une droite *d* alors l'intersection *d* des deux plans est parallèle aux droites d_1 et d_2. »
- Savoir caractériser les points d'un plan de l'espace par une relation $ax + by + cz + d = 0$ avec $a, b\ et\ c$ trois réels non tous nuls.

- Démontrer qu'une droite est orthogonale a toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Probabilités

- Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour $\bar{A}$ et B.

- Démontrer que l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$.

- Démontre que $\forall \alpha \in]0;1[,\ \exists!\ u_\alpha > 0, P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$

- Démontrer que si la variable aléatoire X_n suit la loi $\mathcal{B}(n;p)$ alors $\forall \alpha \in]0;1[$,on a :
  $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$ avec $I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

Estimation

- Avec X_n suit la loi $\mathcal{B}(n;p)$ on pose $F_n = \frac{X_n}{n}$
  Démontrer que pour n assez grand $P\left(p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geq 0{,}95$