**Baccalauréat Général - Série S – Epreuve de mathématiques**
**Février 2013**

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 7 ou 9
Ce sujet comporte 7 pages

**Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**
**L'usage des calculatrices est autorisé conformément à la réglementation en vigueur.**
**Certaines constructions sont à effectuer sur une page annexe à rendre avec la copie, cette annexe sera numérotée dans l'ordre de la rédaction des solutions des candidats.**

## Exercice 1 – [5 points]
## *à traiter par l'ensemble des candidats*

Dans une usine, deux machines $A$ et $B$ fabriquent des écrous. On sait que 64% de la production totale d'écrous provient de la machine $A$ et le reste de la machine $B$. Une étude statistique a montré que

- 5% des écrous provenant de la machine $A$ sont défectueux
- 8% des écrous provenant de la machine $B$ sont défectueux.

On prélève au hasard un écrou à la sortie de l'usine. On considère les événements $D$, $A$ et $B$ suivants :

- $D$ l'événement « l'écrou tiré est défectueux »
- $A$ l'événement « l'écrou tiré provient de la machine $A$ »
- $B$ l'événement « l'écrou tiré provient de la machine $B$ »

Le nombre d'écrous produit par l'usine étant très important, on considère que le tirage est avec remise.

**PARTIE A :**

▶1. Préciser les valeurs des probabilités $P_A(D)$ et $P_B(D)$.

▶2. Démontrer que $P(D) = 0{,}0608$.

▶3. Les événements $A$ et $D$ sont ils indépendants ? Justifier.

▶4. On tire au hasard 5 écrous à la sortie de l'usine de façon indépendante, on appelle $Y$ la variable aléatoire qui correspond au nombre d'écrous défectueux.

a) Montrer que $Y$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Déterminer la probabilité de l'événement $F$ : « il y a exactement un écrou défectueux ». (*On arrondira à $10^{-4}$ près*)

**PARTIE B :**

On tire successivement avec remise un écrou à la sortie de l'usine, on pose $X$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir le premier écrou défectueux.

On rappelle que la probabilité pour qu'un écrou soit défectueux à la sortie de l'usine est $p = 0{,}0608$.

▶1. Soit $n$ un entier naturel strictement positif, démontrer que $P(X = n) = 0{,}0608 \times (0{,}9392)^{n-1}$.

▶2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on admet la propriété suivante :

| |
|---|
| Si $p$ et $q$ sont deux nombres réels tels que $p + q = 1$ et $q$ non nul, alors $\sum_{k=1}^{k=n} p \times q^{k-1} = 1 - q^n$ |

On note $G_n$ l'événement « il faut attendre un nombre d'écrous inférieur ou égal à $n$ pour voir le premier écrou défectueux », démontrer que $P(G_n) = 1 - (0{,}9392)^n$.

▶3. Pourquoi est-on sûr de trouver un entier naturel $N$ strictement plus grand que 1, tel que pour tout $n \geq N$, on a $P(G_n) \in [0{,}99; 1]$ ?

## Exercice 2 – [5 points]
## *à traiter par l'ensemble des candidats*

**Partie A : Restitution Organisée de Connaissance**

Le but de cette partie est de déterminer la limite en $+\infty$ de $\dfrac{e^x}{x}$.

On considère la fonction $g$ définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - \dfrac{1}{2}x^2$.

▶1. Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.

▶2. a) Déterminer le sens de variation de la fonction $g'$ sur $[0; +\infty[$.

b) Calculer $g'(0)$ puis déterminer le signe de $g'$ sur $[0; +\infty[$.

▶3. a) Déterminer le sens de variation puis le signe de la fonction $g$ sur $[0; +\infty[$.

b) En déduire que, pour tout $x > 0$, $\dfrac{e^x}{x} \geq \dfrac{1}{2}x$ puis conclure.

**Partie B : Etude d'une fonction**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.

▶1. Déterminer les limites de $f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

▶2. Dresser le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

▶3. Démontrer que sur $[-2; -1]$, l'équation $f(x) = -4$ admet une unique solution notée $\alpha$.

▶4. L'équation $f(x) = -4$ admet-elle d'autres solutions sur $\mathbb{R}$ ? Justifiez votre réponse.

**Partie C : recherche de l'encadrement d'une solution**

On se propose de trouver un encadrement plus précis de $\alpha$ en utilisant l'algorithme de dichotomie suivant :

```
VARIABLES
    a est réel
    b est réel
    x est réel
    p est réel
DEBUT DE L'ALGORITHME
    Demander la première borne et la stocker dans a
    Demander la seconde borne et la stocker dans b
    Demander la précision et la stocker dans p
    Tant que ……..
        (a + b)/2 → x
        Si    ……..
        Alors
            x → a
        Sinon
            x → b
        Fin SI
    Fin tant que
    Afficher a
    Afficher b
FIN DE L'ALGORITHME
```

▶1. Compléter l'algorithme.

▶2. Quatre élèves voulaient obtenir un encadrement à $10^{-1}$ près de $\alpha$, pour cela chacun d'entre eux a essayé de rentrer le programme correspondant et a obtenu les résultats présentés dans le tableau ci-dessous :

| **Nom** | **Borne $a$ (arrondie à $10^{-2}$)** | **Borne $b$ (arrondie à $10^{-2}$)** |
|---|---|---|
| **Andromaque** | $-1{,}68$ | $-1{,}11$ |
| **Sganarelle** | $-1{,}25$ | $-1{,}18$ |
| **Candide** | $-5{,}72$ | $-5{,}68$ |
| **Godot** | On attend encore ses réponses | |

Déterminer les réponses fausses et la réponse juste, justifier vos réponses sans déterminer vous-même l'encadrement.

## Exercice 3 – [5 points]
## *à traiter par l'ensemble des candidats*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

**Partie A :**

On note $P$ le point d'affixe $p = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $Q$ le point d'affixe $q = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $K$ le point d'affixe $-1$.

▶1. a) Montrer que les points $P$ et $Q$ appartiennent au cercle $\Gamma$ de centre $O$ et de rayon 1.

b) Faire une figure et construire les points $P$ et $Q$.

▶2. a) Déterminer l'ensemble D des points $M$ d'affixe $z$ tels que $|z| = |z+1|$. Représenter cet ensemble sur la figure.

b) Montrer que $P$ et $Q$ sont les points d'intersection de l'ensemble D et du cercle $\Gamma$.

**Partie B :**

On considère trois nombres complexes non nuls $a$, $b$ et $c$.

On note $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$.

On suppose que l'origine $O$ du repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ est à la fois le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit du triangle $ABC$.

***Rappel :*** *$G$ est le centre de gravité du triangle $ABC$* $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

▶1. a) Montrer que $|a| = |b| = |c|$. En déduire $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{c}{a}\right| = 1$.

b) Montrer que $a + b + c = 0$.

c) En écrivant $a + b$ en fonction de $c$, montrer que $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{b}{a} + 1\right| = 1$.

$d$) En utilisant la partie A, en déduire que $p = \frac{b}{a}$ ou $q = \frac{b}{a}$.

▶2. Dans cette question on admet que $p = \frac{b}{a}$ et $\boldsymbol{q = \frac{c}{a}}$.

a) Montrer que $\frac{q-1}{p-1} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, en utilisant les valeurs de $p$ et $q$ données dans la partie A.

b) Montrer que $\frac{q-1}{p-1} = \frac{c-a}{b-a}$.

c) Déduire des deux questions précédentes la nature du triangle $ABC$.

## Exercice 4 - [5 points]
## *à traiter par les candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques*

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = -\frac{1}{5}u_n + 3$.

Sur l'annexe 1, dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, on a représenté la droite $(d)$ dont une équation est $y = -\frac{1}{5}x + 3$ et la droite $(\Delta)$ dont une équation est $y = x$.

**Partie A : Une conjecture**

▶1. Sur l'annexe 1, en laissant apparaître les traits de construction, construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de la suite $(u_n)$.

▶2. Conjecturer graphiquement la limite exacte de la suite $(u_n)$, vous expliciterez la démarche suivie.

**Partie B : Démonstration de la conjecture**

Soit la suite $(v_n)$ définie pour tout entier $n$ naturel par $v_n = u_n - 2{,}5$.

▶1. Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique dont vous préciserez la raison et le premier terme.

▶2. Démontrer que pour tout $n$ entier naturel on a $u_n = 2{,}5 - 1{,}5 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^n$.

▶3. En déduire la preuve de la conjecture faite dans la question 2. de la Partie A.

**Partie C : Le cas général**

Soit $a \in \mathbb{R}$, la suite $(w_n)$ est définie par $w_0 = a$ et pour tout entier naturel $n, w_{n+1} = -\frac{1}{5}w_n + 3$.

▶1. Démontrer que pour tout $n$ entier naturel, on a $w_n = 2{,}5 + (a - 2{,}5) \times \left(-\frac{1}{5}\right)^n$.

▶2. Pour quelle(s) valeur(s) de $a$, la suite $(w_n)$ est elle constante ?

▶3. Démontrer que la limite de la suite $(w_n)$ est un réel qui ne dépend pas de $a$.

## Exercice 4 - [5 points]
## *à traiter par les candidats ayant choisi la spécialité mathématiques*

*Les deux parties sont indépendantes.*

**Partie A :**

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on considère le système $S_k$ : $\begin{cases} 6{,}25x - 9y = 0{,}2 \\ 4{,}5x - 6{,}5y = k \end{cases}$

▶1. Ecrire le système $S_k$ sous forme matricielle : $A\,X = B_k$ où $A$ est une matrice carrée d'ordre 2 et $X$, $B_k$ sont deux matrices colonnes.

▶2. La matrice $A$ est-elle inversible? Si oui, donner son inverse.

▶3. Avec ce qui précède, résoudre le système $S_k$ en fonction de $k$.

**Partie B :**

Dans cette question on pose $A = \begin{pmatrix} 6{,}25 & -9 \\ 4{,}5 & -6{,}5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$.

▶1. Démontrer que $P$ est inversible et donner $P^{-1}$. (*On utilisera la calculatrice pour le calcul de* $P^{-1}$)

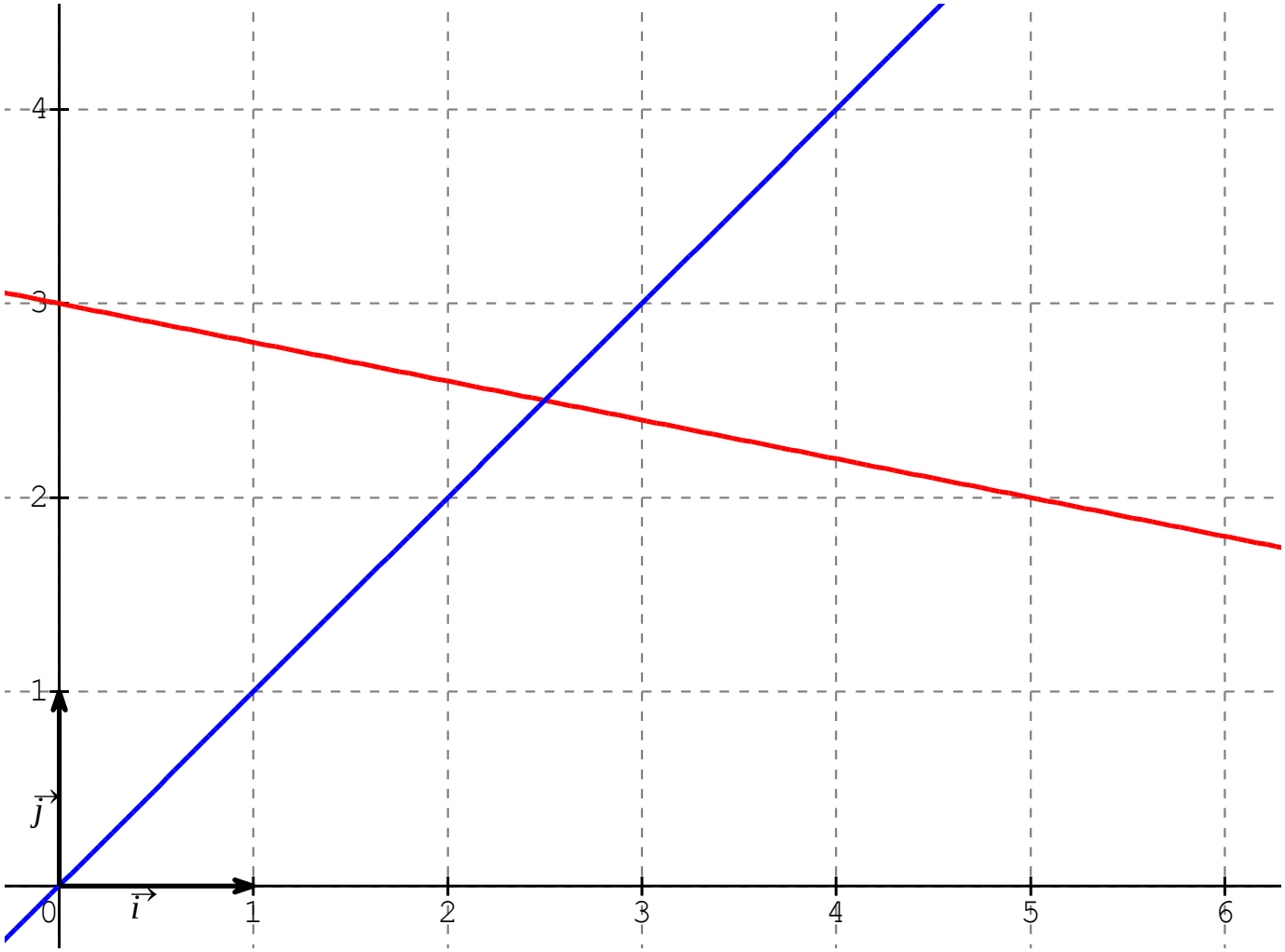
▶2. a) Montrer, en détaillant tous les calculs, que $P^{-1}\,A\,P = D$ .

b) Puis, calculer l'expression de $D^n$ pour tout entier $n \geq 1$.

▶3. Donner l'expression de $A$ en fonction de $D$, $P$ et $P^{-1}$.

▶4. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $A^n = P\,D^n P^{-1}$.

▶5. En déduire les coefficients de la matrice $A^n$ pour tout entier $n \geq 1$.

▶6. On fait tendre $n$ vers $+\infty$, démontrer que les coefficients de la matrice $A^n$ convergent vers ceux de la matrice nulle.

**ANNEXE 1**
***(Exercice 4 pour les candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques)***
***A rendre avec la copie***