Probabilités Conditionnelles
Cours

1 Introduction aux probabilités conditionnelles : fréquences conditionnelles

Exemple 1.
Dans une classe de Terminale de 36 élèves pratiquant l'Anglais ou l'Allemand en première langue, on compte :
– 23 élèves faisant de l'Anglais
– 29 élèves sont des filles
– 17 élèves sont des filles faisant de l'Anglais
On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un élève au hasard dans cet échantillon.
Soit A l'évènement "L'élève fait de l'Anglais"
Soit B l'évènement "L'élève est une fille"
On note $\bar{A}$l'évènement "L'élève fait de l'Allemand"
On note $\bar{B}$ l'évènement "L'élève est un garçon"
1. Résumer la situation en complétant le tableau des effectifs suivant :

	A	$\bar{A}$	Total
B	17		29
$\bar{B}$			
Total	23		36

2. a) Calculer $P(B)$ la probabilité de l'évènement B dans cette classe (ie. la probabilité qu'une personne prise au hasard dans la classe soit un fille)
b) Calculer $P_A(B)$ la probabilité que la personne tirée au hasard chez les gens faisant anglais (et non parmi la population complète) soit une fille.
3. a) Calculer $P(A)$.
b) On note $A \cap B$ l'évènement "L´élève est une fille faisant de l'Anglais". Calculer $P(A \cap B)$ puis $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
4. Comparer $P_A(B)$ et $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ Donner une explication.

Solution 1
1.

	A	$\bar{A}$	Total
B	17	12	29
$\bar{B}$	6	1	7
Total	23	13	36

2. a) $P(B) = \frac{29}{36}$
b) On se restreint à la colonne de A. $P_A(B) = \frac{17}{23}$
3. a) On est dans une situation d'équiprobabilité (il y a autant de chance de choisir un élève qu'un autre). La probabilité de A est égale à l'effectif des élèves faisant de l'Anglais divisé par l'effectif total d'élèves : $P(A) = \frac{23}{36}$
b) La probabilité de $A \cap B$ est égale à l'effectif de $A \cap B$ divisé par l'effectif total d'élèves :
$P(A \cap B) = \frac{17}{36}$ donc $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{17}{23}$
4. On a $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P_A(B)$ car $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{card(A \cap B)}{card(\Omega)}}{\frac{card(A)}{card(\Omega)}} = \frac{card(A \cap B)}{card(\text{A})} = \frac{17}{23}$
Pour s'entraîner :
http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/pi/pourcentages/proportions/proportions9.jsp

2 Probabilités conditionnelles
Définition 2.1
Soient A et B deux évènements tels que A soit de probabilité non nulle (ie.$P(A) \neq 0$). On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A le nombre réel noté $P_A(B)$ défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple 2.
Dans un sac de dragées, 60% des dragées sont de couleur bleue, 30% des dragées sont de couleur bleue et à l'amande et 40% des dragées bleues sont au chocolat.
On choisit une dragée au hasard dans le sac. On note :
A l'évènement "La dragée est à l'amande"
B l'évènement "La dragée est bleue"
C l'évènement "La dragée est au chocolat"
1. Quelqu'un prend une dragée bleue, quelle est la probabilité qu'elle soit au chocolat ?
2. Quelqu'un prend une dragée bleue, quelle est la probabilité qu'elle soit à l'amande ?
3. Quelle est la probabilité de prendre une dragée bleue et au chocolat ?

Solution 2
Traduisons les données de l'énoncé :$P(B) = 0{,}6 \quad P(A \cap B) = 0{,}3 \qquad P_B(C) = 0{,}4$
Ceci nous permet d'obtenir :
1. ($P(B) \neq 0$ donc $P_B(C)$ est bien définie) la probabilité d'obtenir une dragée au chocolat sachant qu'elle est bleue est donnée par l'énoncé : $P_B(C) = 0{,}4$
2. ($P(B) \neq 0$ donc $P_B(A)$ est bien définie) la probabilité d'obtenir une dragée à l'amande sachant qu'elle est bleue : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5$
3. ($P(B) \neq 0$ donc $P_B(C)$ est bien définie) la probabilité de prendre une dragée bleue et au chocolat :
$P(C \cap B) = P_B(C) \times P(B) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$

Exercice résolu 1. Calcul d'une probabilité conditionnelle
On a interrogé des élèves de terminale sur leurs loisirs : 50% d'entre eux déclarent aimer la lecture et 75% déclarent aimer le sport.
De plus, 40% des élèves déclarent aimer la lecture et le sport.
On rencontre au hasard l'un de ces élèves. On considère les évènements L : "L'élève aime la lecture" et S : "L'élève aime le sport"
1. Donner les probabilités des évènements L, S et $L \cap S$.
2. Quelle est la probabilité que l'élève aime le sport sachant qu'il aime la lecture ?
3. Quelle est la probabilité que l'élève aime la lecture sachant qu'il aime le sport ?

Solution de l'exercice résolu 1
1. Cette question est une traduction des données de l'exercice. On a : $P(L) = 0{,}5$;
$P(S) = 0{,}75$; $P(L \cap S) = 0{,}4$.
2. ($P(L) \neq 0$ donc $P_L(S)$ est bien définie) $P_L(S) = \frac{P(L \cap S)}{P(L)} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = 0{,}8$
3. ($P(S) \neq 0$ donc $P_S(L)$ est bien définie) $P_S(L) = \frac{P(L \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}4}{0{,}75} \approx 0{,}53$

Exercice résolu 2. *Calcul de la probabilité de l'intersection de deux évènements à l'aide d'une probabilité conditionnelle.*

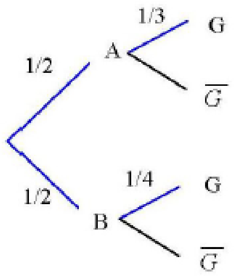
Pierre possède un jeu électronique. Une partie est un duel entre Pierre et un monstre choisi par la machine. Deux choix équiprobables sont possibles : la machine choisit soit le monstre M_1 soit le monstre M_2. Donc les deux évènements A : "Pierre combat le monstre M_1" et B : "Pierre combat le monstre M_2" ont la même probabilité ½ .
Les deux monstres sont de forces inégales et on admet que : si Pierre combat M_1 alors la probabilité qu'il gagne la partie est $\frac{1}{3}$; si Pierre combat le monstre M_2 alors la probabilité qu'il gagne la partie est $\frac{1}{4}$.
Pierre joue une partie. Soit G l'évènement : "Pierre gagne la partie".
1. Calculer la probabilité des évènements $A \cap G$ et $B \cap G$.
2. En déduire la probabilité de G. On met de côté cette question à laquelle on pourra répondre après l'exemple 3 du paragraphe 3.1

Solution de l'exercice résolu 2

Traduisons les données de l'énoncé : $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P_A(G) = \frac{1}{3}$, $P_B(G) = \frac{1}{4}$

1. $P(A \cap G) = P_A(G) \times P(A) = \frac{1}{6}$ et $P(B \cap G) = P_B(G) \times P(B) = \frac{1}{8}$

2. (Expliquer avec un arbre)



– A et B sont deux évènements contraires (B est l'évènement des résultats qui ne réalisent pas A). Donc P(B) = 1 − P(A).

– A et B sont deux évènements incompatibles (A et B ne peuvent se réaliser en même temps). Donc $P(A \cap B) = 0$

donc A et B forment ce qu'on appelle une partition de l'univers Ω, qui est l'ensemble de tous les résultats possibles (ce qui signifie que $\Omega = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$). On en déduit que $G \cap A$ et $G \cap B$ forment aussi une partition de G . On a matérialisé l'évènement G par les branches bleues de l'arbre, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G \cap \Omega) = P\big(G \cap (A \cup B)\big) = P\big((G \cap A) \cup (G \cap B)\big) \\ &= P(G \cap A) + P(G \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24} \approx 0{,}29 \end{aligned}$$

Exercice 1.

Dans une population, les individus sont répartis en quatre groupes sanguins : A, B, AB et O. A l'intérieur de chaque groupe sanguin, il y a deux rhésus (rhésus + ou rhésus -). On a relevé les pourcentages de la population dans le tableau suivant :

Un individu est choisi au hasard. Calculer la probabilité :

1. qu'il soit du groupe O sachant qu'il a un rhésus -.
2. qu'il ait un rhésus - sachant qu'il est du groupe O.

groupe	A	B	AB	O
Rhésus +	32,8	8,1	4,15	36
Rhésus -	7,2	1,9	0,85	9

Exercice 2.

Dans une ville V, le temps du matin suit les probabilités suivantes :

temps	Pluie	Nuages	Ciel bleu
Probabilité	0,2	0,3	0,5

Julie prend son parapluie en partant le matin avec une probabilité de : 1 s'il pleut ; 0,6 s'il y a des nuages ; 0,2 si le ciel est bleu.

1. Calculer la probabilité des évènements suivants :

(a) il pleut et Julie prend son parapluie

(b) il y a des nuages et Julie prend son parapluie

(c) le ciel est bleu et Julie prend son parapluie

2. Calculer la probabilité que Julie prenne son parapluie le matin. On met de côté cette question à laquelle on pourra répondre après l'exemple 3 du paragraphe 3.1

3 Formule des probabilités totales

3.1 Arbre de probabilité

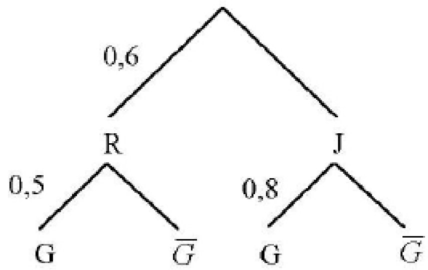
Exemple 3.

Dans un mélange de graines de fleurs roses et de fleurs jaunes, 60% sont des graines de fleurs roses. On sait que :

. 50 % des graines de fleurs roses germent correctement

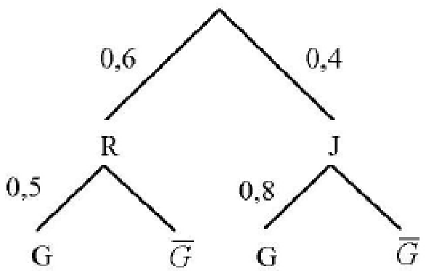
. 80 % des graines de fleurs jaunes germent correctement

On sème une graine prise au hasard dans le mélange. On considère les évènements :
R : "La graine est de fleur rose" ;
J : "La graine est de fleur jaune" ;
G : "La graine germe correctement".
La situation décrite dans l'énoncé est représentée par l'arbre ci-contre que l'on complètera au fur et à mesure.

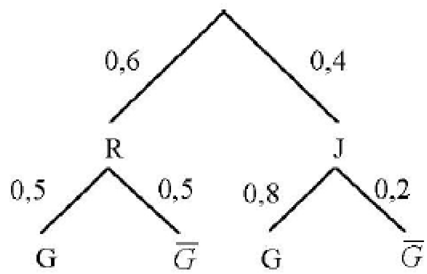


1. Branches au premier niveau de l'arbre
a) Déterminer $P(R)$.
b) Quel lien y a-t-il entre les évènements R et J ? En déduire $P(J)$.
c) Reporter sur l'arbre la probabilité de J, manquant sur la branche au premier niveau.
2. Branches au second niveau de l'arbre
a) A quelles probabilités conditionnelles correspondent les valeurs 0,5 et 0,8 ?
b) Compléter l'arbre par$P_R(G)$ et $P_J(G)$ sur les branches au second niveau.
3. En parcourant les branches de l'arbre
a) Décrire par une phrase chacun des évènements $R \cap G$ et $J \cap G$.
b) Calculer $P(R \cap G)$ en précisant le résultat du cours utilisé. Comment visualiser ce calcul sur l'arbre ?
c) Calculer de même $P(J \cap G)$.
d) En déduire la probabilité que la graine prise au hasard germe correctement.

Solution 3
1. a) D'après l'énoncé, $P(R) = 0{,}6$.
b) R et J sont deux évènements contraires, donc $P(R) = 1 - P(J) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$



c)
2. a) On a : $P(R) \neq 0$ (question 1.a) donc $P_R(G)$ est bien définie. La valeur 0,5 correspond à la probabilité conditionnelle de G sachant R : $P_R(G)$
$P(J) \neq 0$ donc $P_J(G)$PJ (G) est bien définie. La valeur 0,8 correspond à la probabilité conditionnelle de G sachant J : $P_J(G)$.
b) Sachant que la graine est de fleur rose, l'évènement "La graine ne germe pas correctement" est contraire à l'évènement "La graine germe correctement", donc $P_R(\bar{G}) = 1 - P_R(G) = 0{,}5$. On peut résumer par : la somme des probabilités issues d'un nœud d'un arbre est égale à 1.
De même, $P_J(\bar{G}) = 1 - P_J(G) = 0{,}2$.



3. a) L'évènement $R \cap G$ est "La graine est de fleur rose et germe correctement".
L'évènement $J \cap G$ est "La graine est de fleur jaune et germe correctement".
b) D'après la définition d'une probabilité conditionnelle, $P(R \cap G) = P_R(G) \times P(R) = 0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}3$.
Sur l'arbre, on a multiplié les probabilités associées à chacune des branches de premier et second niveau donnant R puis G.
c) $P(J \cap G) = P_J(G) \times P(J) = 0{,}4 \times 0{,}8 = 0{,}32$.
d) Pour que la graine prise au hasard germe correctement, ou bien elle est de fleur rose et germe correctement, ou bien elle est de fleur jaune est germe correctement.
Donc $P(G) = P(R \cap G) + P(J \cap G) = 0{,}3 + 0{,}32 = 0{,}62$.

Exercice 3. Pour s'entraîner :

Faire la question 2 de l'exercice résolu 2 et la question 2 de l'exercice 2 (laissées de côté) à l'aide d'un arbre.

3.2 Enoncé

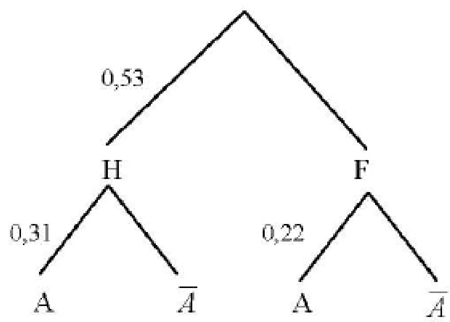
Définition 3.1 Soit l'ensemble des évènements élémentaires d'une expérience aléatoire.
Soient A_1, A_2, . . . ,A_n des évènements de Ω. On dit que les évènements $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ forment une partition de Ω (ou encore un système complet de Ω) si :
– Pour tout entier i compris entre 1 et n, $P(A_i) \neq 0$.
– les A_i sont deux à deux incompatibles, ie. pour tout i et j distincts, on a : $A_i \cap A_j = \emptyset$
– leur réunion est égale à , ie. $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.
Théorème 3.2
Soit l'ensemble des évènements élémentaires d'une expérience aléatoire. Soient A_1,A_2, . . . ,A_n des évènements formant un système complet de Ω Alors la probabilité d'un évènement B quelconque est donnée par : $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$ c'est à dire :
$P(B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1) + \ldots + P_{A_n}(B) \times P(A_n)$

Démonstration :
Les $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ forment un système complet de Ω donc les $(A_i \cap B)_{1\leq i\leq n}$ forment un système complet de B.
Donc $P(B) = P(A_1 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$
et pour tout entier i compris entre 1 et n, $P(A_i \cap B) = P_{A_i}(B) \times P(A_i)$, donc $P(B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1) + \ldots + P_{A_n}(B) \times P(A_n)$

Exemple d'application
Reprenons l'exemple 3. Dans la dernière question 3d), on calcule $P(G)$ par $P(G) = P(R \cap G) + P(J \cap G)$ et on a calcule $P(R \cap G)$ et $P(J \cap G)$ dans les questions 3b) et c) en faisant $P(R \cap G)$ = P(R \ G) = $P_R(G) \times P(R)$ et P(J \ G) = $P_J(G) \times P(J)$.
En conclusion, on a $P(G) = P_R(G) \times P(R) + P_J(G) \times P(J)$ ce qui est la formule des probabilités totales avec B = G, A_1 = R et A_2 = J.

Exercice résolu 3.
Une étude statistique faite dans une région a montré que 53% des personnes pratiquant un sport sont des hommes, parmi lesquels 31% sont adhérents à un club sportif, et que parmi les femmes pratiquant un sport, 22% sont adhérentes à un club sportif.
On rencontre au hasard une personne de la région pratiquant un sport.
On désigne par H l'évènement " La personne est un homme", par F l'évènement " La personne est une femme" et par A l'évènement " La personne est adhérente à un club sportif".
1. Traduire les données en termes de probabilités.
2. Construire un arbre de probabilités décrivant la situation.
3. a) Calculer la probabilité que la personne soit un homme et adhère à un club sportif.
b) Calculer la probabilité que la personne soit une femme et adhère à un club sportif
4. En déduire P(A)

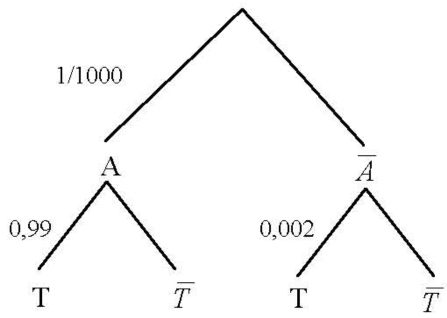
Solution de l'exercice résolu 3
1. $P(H) = 0{,}53$; $P_H(A) = 0{,}31$; $P_F(A) = 0{,}22$.
2. a) $P(H \cap A) = P_H(A) \times P(H) = 0{,}31 \times 0{,}53 = 0{,}1643$
b) $P(F \cap A) = P_F(A) \times P(F) = P_F(A) \times (1 - P(F)) = 0{,}22 \times 0{,}47 = 0{,}1034$
3. $P(A) = P(H \cap A) + P(F \cap A) = 0{,}2677$



Exercice résolu 4.
Une maladie affecte un Français sur 1000. On dispose d'un test dont la fiabilité est la suivante :
– pour 99% des personnes malades, le test est positif
– pour 0,2% des personnes saines, le test est positif

L'objectif est de savoir si ce test est un ”bon test”.
On note A l'évènement ”La personne est atteinte du virus” (A est l'évènement contraire de A), et T l'évènement ”Le test est positif”.
1. Traduire les données de l'énoncé par des probabilités.
2. Construire un arbre de probabilités représentant la situation
3. Calculer la probabilité de T
4. En déduire la probabilité d'être malade sachant que le test est positif. Le test est-il un ”bon test” ?

Solution de l'exercice résolu 4
On cherche la probabilité d'être malade sachant que le test est positif $P_T(A)$
1. $P(A) = \frac{1}{1000}$, $P_A(T) = \frac{1}{1000}$, $P_A(T) = 0{,}99$, $P_{\bar{A}}(T) = 0{,}002$
2.



3. D'après la formule des probabilités totales,
$P(T) = P(A) \times P_A(T) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(T) = \frac{1}{1000} \times 0{,}99 + \frac{999}{1000} \times 0{,}002 = 0{,}002988$
4. $P_T(A) = P(A \cap T) \times P(T) = \frac{P_A(T)}{P(T)} \times P(A)$
$= \frac{0{,}99}{0{,}002988} \times 0{,}001 \approx 0{,}33$
Donc il n'y a que 33% de chances d'être atteint du virus sachant que le test est positif. Le test n'est pas un bon test.

4 Indépendance de deux évènements

4.1 Exemple introductif

Exemple 4.
Une agence de tourisme propose 1000 tickets `a gratter, tous gagnants. 990 d'entre eux font gagner une paire de lunettes de soleil et 10 font gagner un voyage, soit en Asie, soit en Afrique.
Les tickets sont de couleur rose ou bleue.
Le tableau ci-dessous donne la répartition des tickets :

gain	lunette de soleil	voyage		Total
série		en asie	en afrique	
tickets roses	594	4	2	600
tickets bleus	396	1	3	400
Total	990	5	5	1000

Un client reçoit au hasard un des 1000 tickets. On considère les évènements R : ”Le ticket reçu est rose” et V : ”Le client gagne un voyage”.
1. (a) Calculer $P(V)$, $P_R(V)$ et $P_{\bar{R}}(V)$.
(b) La probabilité de gagner un voyage dépend-elle de la couleur du ticket reçu ?
(c) Calculer $P(R)$ et vérifier que $P(V \cap R) = P(V) \times P(R)$.
2. On note A l'évènement ”Le client gagne un voyage en Asie”.
(a) Calculer $P(A)$, $P_R(A)$, et $P_{\bar{R}}(A)$.
(b) La probabilité de gagner un voyage en Asie dépend-elle de la couleur du ticket reçu ?
(c) Vérifier que $P(A \cap R) \neq P(A) \times P(R)$.

Solution 4
1. a) $P(V) = \frac{10}{1000} = 0{,}01$ $\quad P_R(V) = \frac{P(R \cap V)}{P(R)} = \frac{\frac{6}{1000}}{\frac{600}{1000}} = 0{,}01$
(NB : c'est bien égal à la fréquence conditionnelle de V sachant R)
$P_{\bar{R}}(V) = \frac{P(\bar{R} \cap V)}{P(\bar{R})} = \frac{\frac{4}{1000}}{\frac{400}{1000}} = 0{,}01$
(NB : c'est bien égal à la fréquence conditionnelle de V sachant $\bar{R}$).

b) Sachant que le ticket est rose ou qu'il est bleu, la probabilité de gagner un voyage reste la même que si l'on ne connaît pas la couleur du ticket. Le probabilité de gagner un voyage semble ne pas dépendre de la couleur du ticket reçu.
c) $P(R) = \frac{600}{1000} = 0{,}6$; $\quad P(V \cap R) = \frac{6}{1000} = 0{,}006$ (d'après le tableau)
$P(V) \times P(R) = 0{,}01 \times 0{,}6 = 0{,}006 = P(R \cap V)$
2. a) $P(A) = \frac{5}{1000} = 0{,}005 \quad P_R(A) = \frac{P(R \cap A)}{P(R)} = \frac{\frac{4}{1000}}{\frac{600}{1000}} = \frac{1}{150} \approx 0{,}0067$
$P_{\bar{R}}(A) = \frac{P(\bar{R} \cap A)}{P(\bar{R})} = \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{400}{1000}} = \frac{1}{400} = 0{,}0025$
b) La probabilité de gagner un voyage en Asie n'est pas la même que la probabilité de gagner un voyage en Asie sachant que le ticket est rose ou sachant que le ticket est bleu. Il semble donc que la probabilité de gagner un voyage en Asie dépende de la couleur du ticket reçu.
c) $P(A \cap R) = \frac{4}{1000} = 0{,}004$ et $P(A) \times P(R) = 0{,}005 \times 0{,}6 = 0{,}003\,6 = P(A \cap R)$

4.2 Définition, applications

Définition 4.1
On dit que deux évènements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Propriété 4.2
Il y a équivalence entre :
1. A et B sont indépendants
2. $\bar{A}$ et B sont indépendants
3. A et $\bar{B}$ sont indépendants
4. $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants

Démonstration :
1. Supposons A et B indépendants (ie. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$).
$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$ constitue une union disjointe de B.
Donc $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(A) \times P(B) + P(B \cap \bar{A})$
d'où $P(B \cap \bar{A}) = P(B)\big(1 - P(A)\big) = P(B)P(\bar{A})$
2. Pour montrer que si $\bar{A}$ et B sont indépendants alors A et $\bar{B}$ sont indépendants, on utilise le 1. de la démonstration en remplaçant A par B et B par A.
3. Pour montrer que si A et $\bar{B}$ sont indépendants alors $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants, on utilise le 1. de la démonstration en remplaçant B par $\bar{B}$.
4. Pour montrer que si $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants alors A et B sont indépendants, on utilise le 2. de la démonstration en remplaçant B par $\bar{B}$.
Lien avec les probabilités conditionnelles :
Soit A est un évènement de probabilité non nulle, on a : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.
– Si A et B sont indépendants, on a : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ donc $P_A(B) = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$
– Si $P_A(B) = P(B)$, comme $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, alors $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, c'est à dire :
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Donc A et B sont indépendants.
Méthode pour déterminer si deux évènements A et B sont indépendants ou non :
On calcule
- Ou bien : $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$: *définition de l'indépendance*
. Si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, alors A et B sont indépendants.
. Sinon A et B ne sont pas indépendants.
- Ou bien : $P(B)$ et $P_A(B)$ (respectivement $P(A)$et $P_B(A)$) *lien avec les probabilités conditionnelles*
. Si $P_A(B) = P(B)$, alors A et B sont indépendants (respectivement si $P_B(A) = P(A)$).
. Sinon A et B ne sont pas indépendants.

Exercice résolu 5. Déterminer si deux évènements sont indépendants :
Dans un sac comprenant 24 jetons numérotés de 1 à 24, on tire au hasard un jeton. On considère les évènements T : "Obtenir un multiple de trois", S : "Obtenir au moins 15", et P : "Obtenir un nombre pair".
1. Calculer $P(T)$, $P(S)$, et $P(S \cap T)$. Les évènements S et T sont-ils indépendants ?

2. Calculer $P_P(T)$. Les évènements P et T sont-ils indépendants ?

Solution de l'exercice résolu 5
1. On est dans une situation d'équiprobabilité (on a autant de chance de tirer l'un ou l'autre jeton), donc
$P(T) = \frac{\text{nombre de resultats de T}}{\text{nombre total de resultats}} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ de même : $P(S) = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$ et : $P(S \cap T) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$
On a : $P(S \cap T) \neq P(S) \times P(T)$ donc T et S ne sont pas indépendants.
2. P est un évènement de probabilité non nulle (car on peut obtenir le jeton numéro 2 par exemple), donc $P_P(T)$ est bien défini et vaut : $P_P(T) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Or $P(T) = \frac{1}{3}$ donc P et T sont indépendants.

Exercice résolu 6. Calcul de la probabilité de l'intersection de deux évènements indépendants :
Deux voisines, Susie, secrétaire médicale, et Chloé, commerciale, font le même trajet après leur journée de travail. Chacune prend si possible le train de 18h, sinon, celui de 18h30.
On considère que les contraintes horaires de fin de journée de travail des deux voisines sont indépendantes.
La probabilité d'avoir le premier train est de 0,9 pour Susie et 0,8 pour Chloé. Un soir donnée, quelle est la probabilité que les deux voisines se retrouvent :
1. dans le train de 18h ?
2. dans le train de 18h30 ?

Solution de l'exercice résolu 6
Notons S l'évènement "Susie à le premier train" et C l'évènement " Chloé a le premier train". S est l'évènement " Susie a le deuxième train" et C est l'évènement "Chloé a le deuxième train".
Traduisons les données de l'énoncé : P(S) = 0, 9 et P(C) = 0, 8.
1. D'après l'énoncé, les évènements S et C sont indépendants, donc
$P(S \cap C) = P(S) \times P(C) = 0{,}9 \times 0{,}8 = 0{,}72$.
2. D'après la propriété du cours, $\bar{S}$ et $\bar{C}$ sont indépendants puisque S et C le sont également.
Donc $P(\bar{S} \cap \bar{C}) = P(\bar{S}) \times P(\bar{C}) = 0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}02$.
Pour s'entraîner :
http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/pi/probas/independance/independance1.jsp

a) Calcul de la probabilité d'un évènement A connaissant la probabilité d'un événement B indépendant de A et celle de leur intersection
Pour s'entraîner :
http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/pi/probas/independance/independance4.jsp
b) Calculer les probabilités associées à la réunion de deux événements indépendants
Pour s'entraîner :
http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/pi/probas/independance/independance2.jsp