Devoir maison 5

Pour le 28/1/1

Exercice 1 variables aléatoire binomiales conditionnelles

Baccalauréat France série S septembre 2003 *: (5 points)*

Un commerce possède un rayon « journaux » et un rayon « souvenirs ». À la fin d'une journée, on trie les pièces de monnaie contenues dans les caisses de chaque rayon. On constate que la caisse du rayon "journaux" contient 3 fois plus de pièces de 1 € que celle du rayon « souvenirs ». Les pièces ont toutes le côté pile identique, mais le côté face diffère et symbolise un des pays utilisant la monnaie unique. Ainsi, 40% des pièces de 1 € dans la caisse du rayon « souvenirs » et 8%de celle du rayon « journaux » portent une face symbolisant un pays autre que la France (on dira « face étrangère »).

1. Le propriétaire du magasin, collectionneur de monnaies, recherche les pièces portant une face étrangère. Pour cela il prélève au hasard et avec remise 20 pièces issues de la caisse « souvenirs ». On note X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement le nombre de pièces portant une face « étrangère ».

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.
b. Calculer la probabilité qu'exactement 5 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.
c. Calculer la probabilité qu'au moins 2 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.

2. Les pièces de 1 € issues des deux caisses sont maintenant rassemblées dans un sac.
On prélève au hasard une pièce du sac.
On note S l'évènement « la pièce provient de la caisse souvenirs » et E l'événement « la pièce porte une face étrangère ».
a. Déterminer $P(S)$, $P_S(E)$; en déduire $P(S \cap E)$.
b. Démontrer que la probabilité que la pièce porte une face étrangère est égale à 0,16.
c. Sachant que cette pièce porte une face étrangère, déterminer la probabilité qu'elle provienne de la caisse « souvenirs ».

3. Dans la suite, la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans le sac porte une face étrangère est égale à 0,16.
Le collectionneur prélève *n* pièces (*n* entier supérieur ou égal à 2) du sac au hasard et avec remise.
Calculer *n* pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une pièce portant une face étrangère soit supérieure ou égale à 0,9.

Exercice 2 indépendance

Polynésie 99.
Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches.
On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les deux événements suivants :
A: <<On obtient des boules des deux couleurs >>;
B : <<On obtient au plus une blanche >>.
1° a) Calculer la probabilité de l'évènement :
<<Toutes les boules tirées sont de la même couleur >>.
b) Calculer la probabilité de l'évènement :
<<On obtient exactement une boule blanche >>.
c) En déduire que les probabilités $p(A \cap B)$, $p(A)$, $p(B)$ sont :

$$p(A \cap B) = \frac{n}{2^n} \qquad p(A) = \frac{1}{2^{n-1}} \qquad p(B) = \frac{n+1}{2^n}$$

2° Montrer que : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si et seulement si :

$$2^{n-1} = n + 1$$

3° Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel supérieur ou égal à deux par :

$$U_n = 2^{n-1} - (n+1)$$

Calculer U_2 , U_3 , U_4 .
Démontrer que la suite (U_n) est strictement croissante.
4° En déduire la valeur de l'entier n tel que les événements A et B soient indépendants.

Devoir maison 5

Pour le 28/1/1

Exercice 1 variables aléatoire binomiales conditionnelles

Baccalauréat France série S septembre 2003 *: (5 points)*

Un commerce possède un rayon « journaux » et un rayon « souvenirs ». À la fin d'une journée, on trie les pièces de monnaie contenues dans les caisses de chaque rayon. On constate que la caisse du rayon "journaux" contient 3 fois plus de pièces de 1 € que celle du rayon « souvenirs ». Les pièces ont toutes le côté pile identique, mais le côté face diffère et symbolise un des pays utilisant la monnaie unique. Ainsi, 40% des pièces de 1 € dans la caisse du rayon « souvenirs » et 8%de celle du rayon « journaux » portent une face symbolisant un pays autre que la France (on dira « face étrangère »).

1. Le propriétaire du magasin, collectionneur de monnaies, recherche les pièces portant une face étrangère. Pour cela il prélève au hasard et avec remise 20 pièces issues de la caisse « souvenirs ». On note X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement le nombre de pièces portant une face « étrangère ».

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.
b. Calculer la probabilité qu'exactement 5 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.
c. Calculer la probabilité qu'au moins 2 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.

2. Les pièces de 1 € issues des deux caisses sont maintenant rassemblées dans un sac.
On prélève au hasard une pièce du sac.
On note S l'évènement « la pièce provient de la caisse souvenirs » et E l'événement « la pièce porte une face étrangère ».
a. Déterminer $P(S)$, $P_S(E)$; en déduire $P(S \cap E)$.
b. Démontrer que la probabilité que la pièce porte une face étrangère est égale à 0,16.
c. Sachant que cette pièce porte une face étrangère, déterminer la probabilité qu'elle provienne de la caisse « souvenirs ».

3. Dans la suite, la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans le sac porte une face étrangère est égale à 0,16.
Le collectionneur prélève *n* pièces (*n* entier supérieur ou égal à 2) du sac au hasard et avec remise.
Calculer *n* pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une pièce portant une face étrangère soit supérieure ou égale à 0,9.

Exercice 2 indépendance

Polynésie 99.
Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches.
On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les deux événements suivants :
A: <<On obtient des boules des deux couleurs >>;
B : <<On obtient au plus une blanche >>.
1° a) Calculer la probabilité de l'évènement :
<<Toutes les boules tirées sont de la même couleur >>.
b) Calculer la probabilité de l'évènement :
<<On obtient exactement une boule blanche >>.
c) En déduire que les probabilités $p(A \cap B)$, $p(A)$, $p(B)$ sont :

$$p(A \cap B) = \frac{n}{2^n} \qquad p(A) = \frac{1}{2^{n-1}} \qquad p(B) = \frac{n+1}{2^n}$$

2° Montrer que : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si et seulement si :

$$2^{n-1} = n + 1$$

3° Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel supérieur ou égal à deux par :

$$U_n = 2^{n-1} - (n+1)$$

Calculer U_2 , U_3 , U_4 .
Démontrer que la suite (U_n) est strictement croissante.
4° En déduire la valeur de l'entier n tel que les événements A et B soient indépendants.

Correction

Exercice 1

1)a) X suit une loi binomiale de paramètre n=20 et p=0,4 car compte le nombre d'occurrence positives d'une répétition de 20 expériences aléatoires identiques, indépendantes (conséquence du fait que le tirage est AVEC REMISE) à deux issues dont l'issue positive a une probabilité de 0,4.

b) $P(X=5)=\binom{20}{5}0{,}4^5(1-0{,}4)^6 \approx 0{,}075$

c) $P(X \geq 2)=P(X=2)+P(X=3)+\cdots+P(X=20)$ trop long !!!!

$P(X\geq 2)=P(\overline{X<2})=1-P(X<2)=1-\big(P(X=0)+P(X=1)\big)$

$=1-\binom{20}{0}0{,}4^0(1-0{,}4)^{20}-\binom{20}{1}0{,}4^1(1-0{,}4)^{19}\approx 0{,}9995$

2)a)soit x le nombre de pièces dans la caisse journaux alors $P(S)=\frac{x}{3x+x}=\frac{1}{4}$

On sait que 40% des pièces de la caisse des souvenirs sont « étrangères » donc $P_S(E)=0{,}4$

$P(S\cap E)=P(S)P_S(E)=0{,}1$

b) en utilisant la formule des probabilités totales

$P(E)=P(S\cap E)+P(\bar{S}\cap E)=0{,}1+P(\bar{S})P_{\bar{S}}(E)=0{,}1+\frac{3}{4}\times 0{,}08=0{,}16$

c) $P_E(S)=\frac{P(S\cap E)}{P(E)}=\frac{0{,}1}{0{,}16}=0{,}625$

3) on a affaire ici à une binomiale de paramètre n et 0,16 car on suppose qu'il y a remise ou que le nombre de pièce dans la grande caisse soit tellement grand que les probabilités restent à peu près inchangées.

$P(Y\geq 1)\geq 0{,}9 \Leftrightarrow P(\overline{Y=0})\geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1-P(Y=0)\geq 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}1\geq P(Y=0)$ $\Leftrightarrow 0{,}1\geq 0{,}16^n$

On peut faire des essais , utiliser la fonction tableur de la calculatrice ou $\Leftrightarrow \ln(0{,}1)\geq \ln(0{,}16^n)$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}1)\geq n\times\ln(0{,}16)$ $\Leftrightarrow \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}16)}\leq n$ car vu que $0{,}16<1$ on aura $\ln(0{,}16)<0$

Or $\frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}16)}\approx 13{,}2$ donc il faudra prélever au moins 14 pièces

Exercice 2

1)a) soit X la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches du tirage. Vu qu'il y la répétition de n expériences aléatoires identiques et indépendantes à deux issues et que la probabilité de tirer une boule noire est de ½ on aura :

P(« toutes les boules ont la même couleur »)$=P(X=n)+P(X=0)$

$=\binom{n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^0+\binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

b) $P(X=1)=\binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) $P(A\cap B)=P(X=1)=n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{n}{2^n}$

$P(\bar{A})=P(X=n)+P(X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$

$P(B)=P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\left(\frac{1}{2}\right)^n=(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

2) $P(A\cap B)=P(B)P(A)\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(B)\big(1-P(\bar{A})\big)\Leftrightarrow \frac{n}{2^n}=(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$n=(n+1)\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\Leftrightarrow n2^{n-1}=(n+1)(2^{n-1}-1)\Leftrightarrow n2^{n-1}=n2^{n-1}-n+2^{n-1}-1\Leftrightarrow n+1=2^{n-1}$

3)$U_2=2^1-3=-1$ $U_3=2^2-4=0$ $U_4=2^3-5=3$

$U_{n+1}-U_n=2^n-(n+2)-\big(2^{n-1}-(n+1)\big)=2^n-2^{n-1}-1=2^{n-1}(2-1)-1=2^{n-1}-1$

Donc pour $n\geq 2$ on aura systématiquement $U_{n+1}-U_n>0$ donc la suite est croissante.

4) vu que la suite est croissante et que $U_4>0$ on sait que pour tout n supérieur ou égal à 4 on aura : $U_n>0$ donc 3 est la seule valeur pour laquelle $U_n=0$ ainsi si $n\neq 3$ on n'aura pas $n+1=2^{n-1}$

Pour que A et B soient indépendants il faut donc que n=3