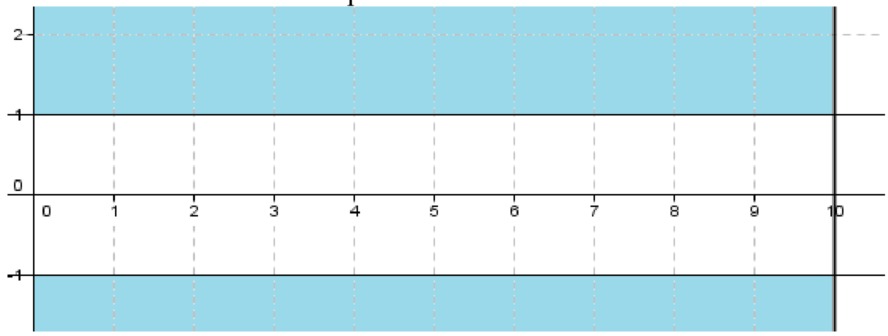
Devoir maison : probabilités, algorithmique, tableur.

Pour le 4 décembre

Un automate dispose de trois mouvements différents : Il peut avancer tout droit, ou se déplacer en diagonale vers la gauche (ou a droite) ce qui correspond à un une unité vers l'avant et une vers la gauche (droite). On supposera ces trois types de déplacements équiprobables.

Cet automate doit emprunter un pont sans garde-fou de dix pas de long et de deux pas de large. Le but de l'exercice est de déterminer la probabilité $P(S)$ de l'événement S : « l'automate traverse le pont » c'est-à-dire qu'au bout de dix déplacements l'automate atteint le bord du pont sans être tombé dans l'eau.



1) On représente le pont par un rectangle blanc dans le repère orthonormé ci-dessus. On suppose que l'automate se trouve à l'origine au début de la traversée. On notera $(x;y)$ les coordonnées de la position de l'automate après x déplacement.

On écrit l'algorithme suivant à l'aide d'Algobox :

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  x PREND_LA_VALEUR 0
  y PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (y>=-1 ET y<=1 ET x<=9) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    d PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(0,2)-1
    y PREND_LA_VALEUR y+d
    x PREND_LA_VALEUR x+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "la position de l'automate est ("
  AFFICHER x
  AFFICHER ","
  AFFICHER y
  AFFICHER ")"
FIN_ALGORITHME
```

a) Adapter ce programme sur votre calculatrice ou dans un langage de votre choix et donner le programme obtenu. (la fonction Output peut être utile)

b) Dire parmi les propositions suivantes celles que l'on n'a pas pu obtenir à l'aide de l'algorithme et dire pourquoi : (0 ,10), (-1,0), (8,2), (9,-3)

c) Que doit on rajouter dans cet algorithme pour qu'il indique en plus si l'automate a réussi sa traversée ou pas. Vous devez maintenant adapter votre programme.

2) Pour tout n entier naturel compris entre 0 et 10, on note :

A_n l'évènement « après n déplacements, l'automate se trouve au point de coordonné -1 »

B_n l'évènement « après n déplacements, l'automate se trouve au point de coordonné 0 »

C_n l'évènement « après n déplacements, l'automate se trouve au point de coordonné 1 »

On note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n et C_n.

a) Justifier que $a_0 = c_0 = 0$ et $b_0 = 1$

b) Montrer que pour tout entier naturel n compris entre 0 et 9,

on a $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{3} \\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n+c_n}{3} \end{cases}$ on pourra s'aider d'un arbre pondéré et d'un vrai raisonnement (probabilités totales, probabilités conditionnelles).

c) Calculer les probabilités $P(A_1)$, $P(B_1)$ et $P(C_1)$

d) Calculez la probabilité que l'automate soit encore sur le pont après deux mouvements.

e) Quelles valeurs doit on copier à la ligne deux ?

f) Quelles formules doit on copier dans les cases B3, C3 et D3 ?

g) Faire le tableau sur votre ordinateur, ou a l'aide de votre calculatrice et vous recopierez les résultats obtenus à la ligne douze sur le tableau ci-contre arrondis à 10^{-4}.

h) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} de la probabilité pour que l'automate arrive à traverser le pont.

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0			
3	1			
4	2			
5	3			
6	4			
7	5			
8	6			
9	7			
10	8			
11	9			
12	10			