Nom & Prénom : ……………………………………………………….   www.dimension-k.com

Devoir surveillé 4 : Probabilités et exponentielles

Exercice 1

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres provenant de trois horticulteurs : 35% des plans proviennent de l'horticulteur H_1, 25% de H_2et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.

La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80% de conifères, celle de l'horticulteur H_2 en comporte 50% et celle de l'horticulteur H_3 en aura seulement 30%.

1) Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock. On envisage les événements suivants :

H_1 : « l'arbre a été acheté chez l'horticulteur H_1 » ,
H_2 : « l'arbre a été acheté chez l'horticulteur H_2 » ,
H_3 : « l'arbre a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
C : « l'arbre choisit est un conifère »

a) Construire un arbre pondéré représentant la situation
b) Comment peut-on écrire de manière compacte l'évènement « l'arbre est un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 », calculez la probabilité de cet événement.
c) Justifier avec soin que $P(C) = 0{,}525$
d) L'arbre choisit est un conifère, donner un arrondi à 10^{-3} de la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteurH_1.
e) C et H_1 sont-ils des événements indépendants ? Justifiez par le calcul.

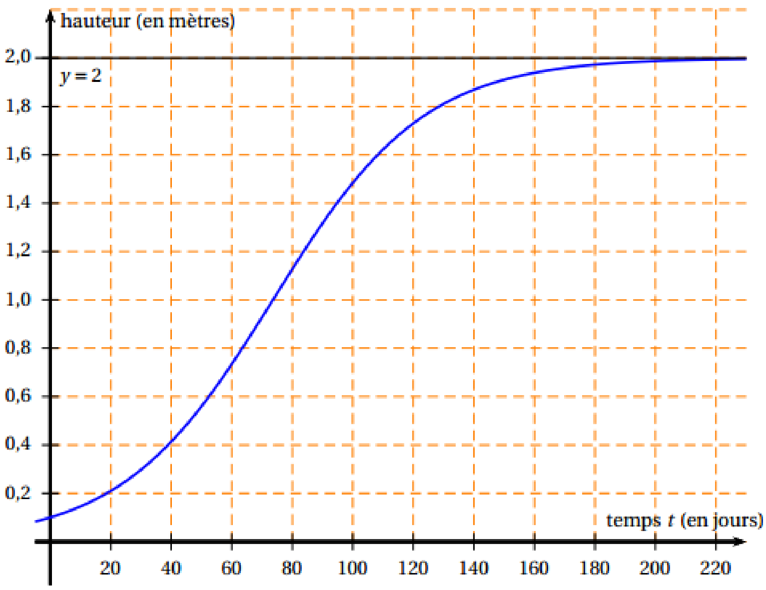
2) On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

a) Justifiez que X suit la loi binomiale dont on précisera les paramètres.
b) Quelle est la probabilité que l'échantillon contienne exactement 5 conifères. Après avoir donné une expression exacte de cette valeur, vous en donnerez une approximation à 10^{-3}.
c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ? Donnez une approximation à 10^{-3} de cette probabilité.

Exercice 2

Partie 1

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique ci-contre représente son évolution.



La hauteur est en mètre et le temps en jour. On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type : $h(t) = \frac{a}{1+b\,e^{-0,04t}}$ où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plan exprimé en mètre.

On sait qu'initialement à $t = 0$ le plan mesure 0,1m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2m.

1) déterminer en fonction de a et b la valeur de $h(0)$ et la limite de $h(x)$ quand x tends vers $+\infty$

2) en déduire la valeur des constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plan de maïs étudié.

Partie 2

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0; 250]$ par :

$f(t) = \frac{2}{1+19\,e^{-0,04t}}$

1) Déterminer la dérivée de f sur l'intervalle [0 ;250].

2) En déduire les variation de f sur [0 ;250]

Exercice 3

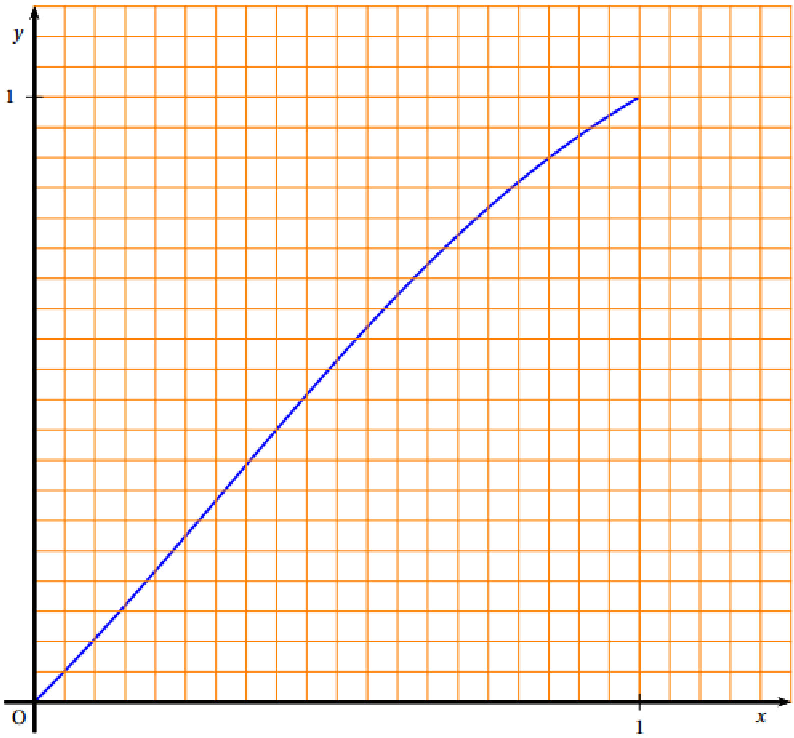
Partie 1 (petite pierre)

1) Etudier les variations de la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^x - x - 1$
2) En déduire le signe de cette fonction sur $\mathbb{R}$.
3) En déduire que $\forall x \in [0; +\infty[\,,\, e^x - x > 0$

Partie 2

On considère la fonction f définie sur [0 ;1] par $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x}$.

Sa courbe $(\mathcal{C}_f)$est donnée ci-desssous, le graphique sera a compléter.



1) Montrer que $\forall x \in [0; 1], f(x) \in [0,1]$

2) Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

a) montrer que $\forall x \in [0; 1], f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$

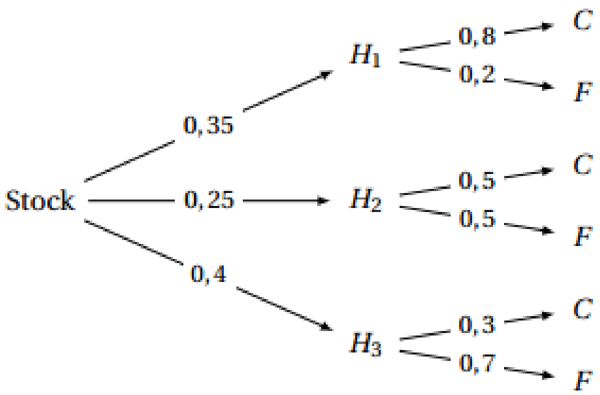
b) Après avoir tracer (D) sur le graphique, etudier la position de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à cette droite.

Correction :

Ex 1 métropole 2013

Puisque le choix de l'arbre se fait au hasard dans le stock de la jardinerie, on assimile les proportions données à des probabilités.

1. a. L'arbre pondéré traduisant cette situation est :



   b. On cherche à calculer la probabilité de l'intersection $H_3 \cap C$, donc : $P(H_3 \cap C) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0,4 \times 0,3$. On a donc $P(H_3 \cap C) = 0,12$.

   c. Puisque la jardinerie ne se fournit qu'auprès de trois horticulteurs, les événements H_1, H_2 et H_3 forment une partition de l'univers. On peut donc appliquer la loi des probabilités totales, et on en déduit :
   $P(C) = P(H_1) \times P_{H_1}(C) + P(H_2) \times P_{H_2}(C) + P(H_3) \times P_{H_3}(C) =$
   $0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3 = 0,525$.

   d. On cherche cette fois à calculer une probabilité conditionnelle :
   $P_C(H_1) = \dfrac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,35 \times 0,8}{0,525} \approx 0,533$.

2. a. Nous avons un schéma de Bernoulli (l'arbre choisi est-il un conifère ?), avec une probabilité de succès de 0,525 qui est répété 10 fois de façon indépendante (puisque l'on suppose que les choix successifs peuvent être assimilés à un tirage au sort avec remise), donc la variable aléatoire X suit bien une loi binomiale de paramètres 10 et 0,525.

   b. La probabilité demandée ici est celle de l'événement $X = 5$, et donc :
   $P(X=5) = \binom{10}{5} \times 0,525^5 \times (1-0,525)^5$ Finalement $P(X=5) \approx 0,243$.

   c. Cette fois, la probabilité demandée est celle de $X \leqslant 8$, qui est l'événement contraire de la réunion des événements disjoints $X = 9$ et $X = 10$. On a alors : $P(X \leqslant 8) = 1 - P(X=9) - P(X=10) \approx 0,984$.

1 e) $P(C \cap H_1) = P(H_1)P_{H_1}(C) = 0.35 \times 0.8 = 0.28$ et $P(H_1)P(C) = 0.35 \times 0.525 = 0.18375$ donc $P(C \cap H_1) \neq P(H_1)P(C)$ donc H_1 et C ne sont pas des événements indépendants.

Nom & Prénom : ………………………………………………………….   www.dimension-k.com

Exercice 2 (ex1 pondichery 2013)

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie 1

$$h(t) = \frac{a}{1+be^{-0,04t}}$$

On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure 0,1 m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.

- Par propriété de la fonction exponentielle, $\lim\limits_{t\to+\infty} 1+be^{-0,04t} = 1$ donc par quotient $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = a$, d'après l'énoncé on a donc $a = 2$.
- $h(0) = 0,1 \Rightarrow \frac{a}{1+b} = 0,1 \Rightarrow b = \frac{2}{0,1} - 1 = 19$

Partie 2

$$f(t) = \frac{2}{1+19e^{-0,04t}}$$

1. f est de la forme $\frac{2}{u}$ avec $u(t) = 1+19e^{-0,04t}$ donc $f' = -\frac{u'}{u^2}$ avec $u'(t) = -0,76e^{-0,04t}$, soit (confusion à ne pas faire entre fonction u, u' et valeurs en t ...)

$$f'(t) = \frac{2\times 0,76e^{-0,04t}}{\left(1+19e^{-0,04t}\right)^2}.$$

Pour tout $t \in [0\,;250]$, $f'(t) > 0$ donc f strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;250]$.

Exercice 3 (amérique du nord 2011)

Partie 1 (petite pierre)

1) Etudier la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^x - x - 1$

$g'(x) = e^x - 1$, cette dérivée est croissante et s'annulle en 0 donc elle est négative avant 0 et positive après et donc g sera décroissante avant 0 et croissante après. Elle atteint donc un minimum en 0 : $g(0) = 0$

2) En déduire le signe de cette fonction sur $\mathbb{R}$.

0 étant le minimum de la fonction (atteint en 0) on peut dire que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$

3) En déduire que $\forall x \in [0;+\infty[\,, e^x - x > 0$

Soit x un réel positif, on a $g(x) \geq 0$ donc $e^x - x - 1 \geq 0$ donc $e^x - x \geq 1 > 0$ d'où : $\forall x \in [0;+\infty[\,, e^x - x > 0$

Partie 2

On considère la fonction f définie sur [0 ;1] par $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x}$.

Sa courbe $(\mathcal{C}_f)$est donnée ci-desssous, le graphique sera a compléter.

1) Montrer que $\forall x \in [0;1], f(x) \in [0,1]$

Sur $[0,1]$ on a : $f'(x) = \frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2} = \frac{e^{2x}-xe^x-e^{2x}+2e^x-1}{(e^x-x)^2} = \frac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2} = \frac{e^x(2-x)-1}{(e^x-x)^2}$

Or sur $[0,1]$ on a $(2-x) \geq 1$ et $e^x \geq 1$ donc $e^x(2-x) \geq 1$ et donc le numérateur de la dérivé est positif ou nu, donc la fonction f est croissante.

Ainsi $\forall x \in [0;1]$ on a : $0 \leq x \leq 1$, par croissance de f on a : $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ or $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ donc $\forall x \in [0;1], f(x) \in [0,1]$.

2) Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

a) montrer que $\forall x \in [0;1], f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$

Soit $x \in [0;1]$, $f(x) - x = \frac{e^x-1}{e^x-x} - x = \frac{e^x-1}{e^x-x} - \frac{xe^x-x^2}{e^x-x} = \frac{e^x-1-xe^x+x^2}{e^x-x}$ et

$\frac{(1-x)g(x)}{e^x-x} = \frac{(1-x)(e^x-x-1)}{e^x-x} = \frac{e^x-x-1-xe^x+x^2+x}{e^x-x} = \frac{e^x-1-xe^x+x^2}{e^x-x} = f(x) - x$ CQFD

b) Après avoir tracer (D) sur le graphique, etudier la position de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à cette droite.

La position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D) est donné par le signe de $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$ or $g(x)$ s'annulle en 0 et est positive le reste du temps, de plus (1-x) est nul en 1 et est positive sur $[0;1[$ donc :

$f(x) - x > 0$ sur $]0;1[$ et $f(x) - x = 0$ en 0 et en 1

Donc la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est audessus de (D) sur l'intervalle et les deux courbes se coupent en x=0 et x=1.