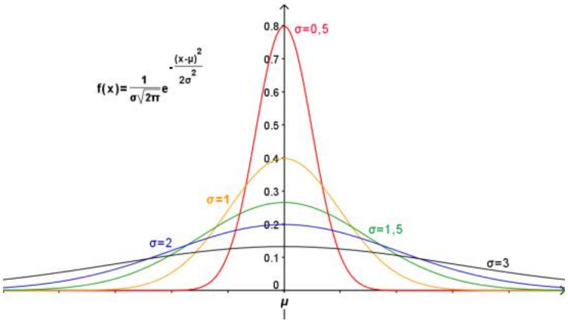
Chap 13 – La loi normale

La loi normale est la plus importante des lois continues.
C'est la loi la plus naturelle quand on considère beaucoup de problèmes de la vie courante (durée de vie d'ampoules, taille de clous ..)
Bien des tests statistiques s'appuient sur cette loi.
La loi binomiale tend vers une loi normale

I. La loi normale $N(\mu;\sigma^2)$

Définition
Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi normale $N(\mu;\sigma^2)$ signifie que la densité de probabilité est la fonction f définie sur R par $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ la variable aléatoire.



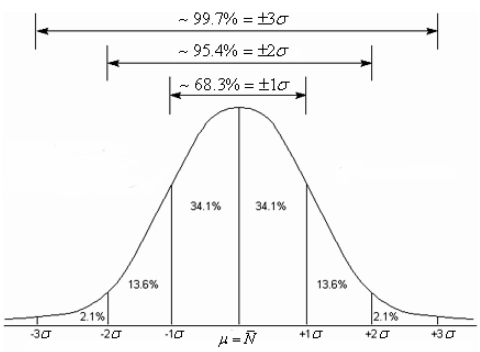
Allure de la courbe représentative de f
On peut voire une courbe en cloche centrée et symétrique par rapport à $x=\mu$.
Plus l'écart type est important, plus la courbe est étalée, l'aire devant rester égale à un, elle sera aussi plus écrasée.

Modifier μ revient à faire une translation horizontale de la courbe.

Propriété

1) f est continue sur R
2) Pour tout nombres réels a et , $P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx$
3) L'aire totale sous la courbe est égale à 1 ; elle représente $P(X\in]-\infty;+\infty[)$

Les intervalles « un, deux, trois, sigmas »



On a un problème on ne sait pas du tout intégrer une telle fonction, le calcul des probabilités s'annonce épineux. On a toute fois quelques résultats assez intéressants qui nous permettrons de trouver quelques probabilités avec peu de calcul.
Les résultats schématisés ci-contre s'écrivent aussi :
$P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)\approx 0{,}68$
$P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)\approx 0{,}95$
$P(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)\approx 0{,}997$

Ainsi la probabilité pour que X soit distante de plus de 3σ de μ est quasi-nulle.

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale :
Si $np\ge 5$ et si $n(1-p)\ge 5$ alors la loi binomiale de paramètre n et p peut être approchée par la loi normale : d'espérance $\mu=np$ et de variance $\sigma^2=np(1-p)$.

.

II. La loi normale $N(0;1)$

Vu qu'on ne sait intégrer la fonction de densité on doit passer par une approximation de l'aire prise entre C_f l'axe des abscisses et deux verticales. Pour nous faciliter la vie, il existe des tables sur lesquelles on peut trouver des approximations, le soucis c'est que si on doit couvrir toutes les $N(\mu;\sigma^2)$ possibles ça prendrait une place infinie. On va se concentrer sur la plus simple d'entre elle $N(0;1)$ appelée loi normale centrée réduite, et apprendre un moyen pour passer de l'une à l'autre

Définition
Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi normale $N(\mu;\sigma^2)$ signifie que la variable aléatoire $T=\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $N(0;1)$

Remarque :

Vu la fonction de densité de $N(\mu;\sigma^2)$ celle de $N(0;1)$ sera plus simple : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ hélas on ne sait pas non plus l'intégrer.

Propriété

1) La fonction f est paire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et donc $P(X\in[0;+\infty[\,)=\frac{1}{2}$. On dit que la courbe représentant f est « une courbe en cloche »
2) pour tout nombre réel u, $P(X\le -u)=1-P(X>-u)$, or pour des raisons de symétrie $P(X>-u)=P(X<u)$ donc $P(X\le -u)=1-P(X\le u)$
3) Si X est une variable aléatoire qui suit la loi $N(0;1)$, alors pour tout nombre réel $\alpha\in]0;1[$, il existe un unique nombre réel $u_\alpha>0$ tel que $P(-u_\alpha\le X\le u_\alpha)=1-\alpha$

Démonstration de la propriété 3

Par symétrie de la courbe de f, $P(-u\le X\le u)=2\,P(0\le X\le u)=2\int_0^u f(x)dx=2G(u)$
où G est la primitive de f sur R qui s'annule en 0.
G est continue et strictement croissante (car f>0) sur $]0;+\infty[$.
De plus $\lim_{u\to+\infty}G(u)=\frac{1}{2}$ car cela correspond à l'aire sous la courbe de f sur $[0;+\infty[$
D'où le tableau de variation ci-contre de 2G.
Ainsi pour tout nombre réel $\in]0;1[$, le nombre $1-\alpha\in]0;1[$
donc d'après la conséquence du thérorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $u_\alpha>0$ tel que $2G(u_\alpha)=1-\alpha$
c'est-à-dire : $P(-u_\alpha\le X\le u_\alpha)=1-\alpha$

t	0	$+\infty$
2G(t)	0	↗ 1

Définition / Propriété

L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit $N(0;1)$ est :
$E(X)=\lim_{x\to-\infty}\int_t^0 xf(x)dx+\lim_{t\to+\infty}\int_0^t xf(x)dx$ où f est la densité.
Cette espérance est nulle.

Démonstration

on pourrait tous simplement se servir du fait que $xf(x)$ est une fonction impaire et qu'on l'intègre sur un intervalle symétrique par rapport à zéro, mais vu les bornes de cet intervalle on est bloqué.

$\int_0^t xf(x)dx=\int_0^t x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ or en posant $u(x)=-\frac{x^2}{2}$ on a $u'(x)=-x$ et donc :

$$\begin{aligned}\int_0^t x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx &= \int_0^t\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\left(u'(x)e^{u(x)}\right)dx\\ &=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\left(u'(x)e^{u(x)}\right)dx\\ &=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{u(x)}\right]_0^t \qquad \text{car} \qquad \left(e^{u(x)}\right)'=u'(x)e^{u(x)}\\ &=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}-e^{-\frac{0^2}{2}}\right)\end{aligned}$$

Donc $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t xf(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}-e^{-\frac{0^2}{2}}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}-1\right)=0$

De même $\lim_{x\to-\infty}\int_t^0 xf(x)dx=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{0^2}{2}}-e^{-\frac{t^2}{2}}\right)=0$

Et donc $E(X)=0$

Définition propriété (admise)

Si X suit une loi $N(0;1)$ alors sa variance est : $V(X)=E[(X-E(X)^2]$ et $V(X)=1$

Corollaire

Si X suit une loi normale $N(\alpha;\beta)$ alors $E(X)=\alpha$ et $V(X)=\beta$

Démonstration

On sait que vu que X suit une loi normale $(\alpha;\beta)$, $T=\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $N(0;1)$.

On a donc $X = T\beta + \alpha$ or on sait que l'espérance est linéaire et donc :
$$E(X) = E(T\beta + \alpha) = E(T)\beta + \alpha = 0\beta + \alpha = \alpha$$
De plus vu les propriétés de la variance :
$$V(X) = V(T\beta + \alpha) = V(T)\beta^2 = 1\beta^2 = \beta^2$$

On a vu au I que si l'on prend un n suffisamment grand on a $B(n;p)$ qui est très proche de $N\big(np; np(1-p)\big)$ si de plus on utilise le fait que si X suit une loi normale $N(\mu;\sigma^2)$ alors la variable aléatoire $T = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $N(0;1)$ le théorème admis suivant fait un peu plus sens

Théorème de Moivre-Laplace

Pour tout nombre entier naturel n, X_n est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $B(n;p)$. On pose $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, variable centrée réduite associée à X_n. Alors pour tous nombre réels a et b tels que $a < b$, $P(a \leq X \leq b)$ tend vers $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ lorsque n tends vers $+\infty$.