Devoir surveillé : intégration et lois continues

Exercice 0

1) X suit une loi uniforme sur $[100; 500]$.
   a. Donner la fonction densité de probabilité associée à X.
   b. Déterminer $(120 < X < 130)$, $P(1000 < X < 2000)$, et $P(X > 200)$
   c. Donner sans justifier l'espérance de X
2) Y suit une loi exponentielle de paramètre 10
   a. Donner la fonction densité de probabilité de Y
   b. Déterminer $P(Y > 200)$ et $(20 < Y < 130)$.
   c. Déterminer à l'aide d'une intégration par partie la valeur de $E(Y)$ (R.O.C.)

Exercice 1

$I = \int_0^2 (3x^2 + 4x - 2)dx$

$J = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) dx$

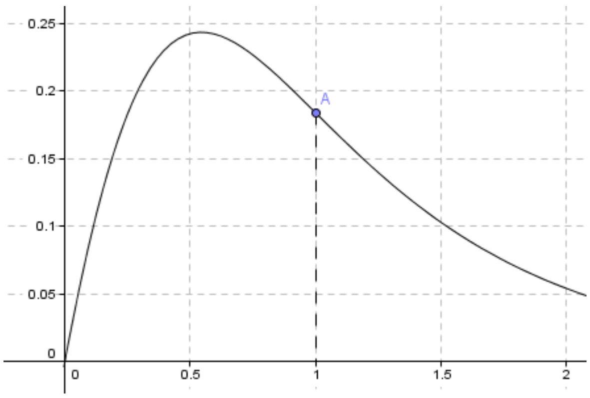
$L = \int_1^e (x+3)\ln x \ dx$

$H = \int_0^2 (3x+2)(3x^2+4x-2)^4 dx$

$K = \int_{-1}^1 \frac{2x+3}{(x^2+3x-18)} dx$

$M = \int_0^3 \frac{(4x-3)}{\sqrt{2x^2-3x+16}} dx$

Exercice 2



La courbe ci-contre représente la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
Cette courbe passe par $A\left(1; \frac{1}{2e}\right)$ et $O(0; 0)$
Sur $[0; 1]$ elle est au-dessus du segment [0A] .
1) Montrer que $\int_0^1 f'(x)\, dx = \frac{1}{2e}$ et $\int_0^1 f(x)\, dx \geq \frac{1}{4e}$
En fait la fonction f est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2+1}$
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter le résultat obtenu
3) On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :
$g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$
Etablir que $g(x) = 0$ admet une solution α unique sur $[0; +\infty[$
4) Montrer que sur $[0; +\infty[$ les fonctions $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signe contraires. En déduire les variations de f
5) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_n^{2n} f(x)\, dx$
   a. Montrer que pour tout x dans $[0; +\infty[$ on a : $0 \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n})$
   c. En déduire la limite de u_n quand n tends vers $+\infty$.

Exercice 3 (bonus à faire que si vous avez tout terminé , sinon ça fait un petit DM pour vendredi)

X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $(0; 1)$, loi qui admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1) Prouver que si x vérifie $0 \leq x \leq 1$ alors $e^{-\frac{x}{2}} \leq e^{-\frac{x^2}{2}} \leq e^0$
   a. En déduire un encadrement de $f(x)$ sur $[0; 1]$
   b. Donner un encadrement de $P(0{,}3 < X < 0{,}7)$
2) Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = \int_{-t}^{t} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$
   a. Simplifier l'expression de g
   b. En déduire $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t)$
   c. En déduire l'espérance de X.

Correction du devoir surveillé : intégration et lois continues

Exercice 0

1) X suit une loi uniforme sur $[100; 500]$.
   a. f sera la fonction définie sur $[100; 500]$ par $f(x) = \frac{1}{500-100} = \frac{1}{400}$
   b. Déterminer $P(120 < X < 130) = \frac{130-120}{500-100} = \frac{10}{400} = \frac{1}{40}$
   $P(1000 < X < 2000) = \ 0$ car $[100; 500] \cap [1000; 2000]$
   $P(X > 200) = P(200 < X < 500) + P(500 < X) = \frac{500-200}{500-100} = \frac{3}{4}$
   c. $E(X) = \frac{100+500}{2} = 300$
2) Y suit une loi exponentielle de paramètre 10
   a. f sera la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 10\ e^{-10x}$
   b. $P(X > 200) = e^{-10\times 200} = e^{-2000}$
   $P(20 < X < 130) = P(20 < X) - P(130 < X) = e^{-10\times 20} - e^{-10\times 130} = e^{-200} - e^{-1300}$
   c. $g(t) = \int_0^t x\, f(x)\, dx = \int_0^t x\ 10\ e^{-10x}\, dx$ je pose $u(x) = x$ et $v'(x) = 10\ e^{-10x}$ et j'ai donc : $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-10x}$ et donc $g(t) = [-xe^{-10x}]_0^t - \int_0^t -1e^{-10x}\, dx = -te^{-10t} + 0e^0 - \left[\frac{1}{10}e^{-10x}\right]_0^t = -te^{-10t} + 0 - \frac{1}{10}e^{-10t} + \frac{1}{10}e^0$Déterminer à l'aide d'une intégration par partie la valeur de $E(Y) = \lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(-te^{-10t} - \frac{1}{10}e^{-10t} + \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10}$
   $-te^{-10t} = -\frac{1}{10}\times\frac{1}{\frac{e^{10t}}{10t}}$ or $\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} 10t = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty\ (et\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0) \end{cases}$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^{10t}}{10t} = +\infty$ donc :
   $\lim\limits_{t\to+\infty} - te^{-10t} = 0$ de plus $\lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{1}{10}e^{-10t} = 0$
   Donc $E(Y) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(-te^{-10t} - \frac{1}{10}e^{-10t} + \frac{1}{10}\right) = 0 + 0 + \frac{1}{10}$

Exercice 1 (30min)

$I = \int_0^2 (3x^2 + 4x - 2)dx$
$=[x^3 + 2x^2 - 2x]_0^2$
$=2^3 + 2\times 2^2 - 2\times 2 - (0^3 + 2\times 0^2 - 2\times 0)$
$=12$

$H = \int_0^2 (3x + 2)(3x^2 + 4x - 2)^4 dx$
$= \int_0^2 \frac{1}{2}(6x + 4)(3x^2 + 4x - 2)^4 dx$
$= \left[\frac{1}{2}\frac{(3x^2+4x-2)^5}{5}\right]_0^2 = \frac{(3\times 2^2+4\times 2-2)^5}{10} - \frac{(-2)^5}{10}$
$= \frac{18^5+32}{10} = 188960$

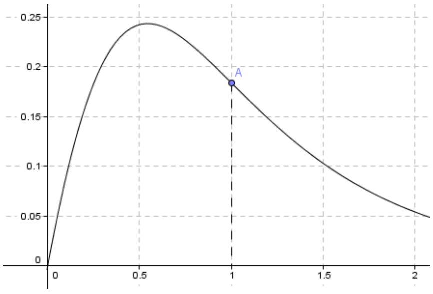
$J = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) dx$
$= \left[\frac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)}{2} - \frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}{2}$
$= \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$K = \int_{-1}^{1} \frac{2x+3}{(x^2+3x-18)} dx$
$= [\ln|x^2 + 3x - 18|]_{-1}^{1}$
$= \ln|1 + 3 - 18| - \ln|1 - 3 - 18|$
$= \ln(14) - \ln(20) = \ln\left(\frac{14}{20}\right) = \ln(0{,}7)$

$L = \int_1^e (x + 3)\ln x\ \ dx$
On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x + 3$
$L = \left[\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\frac{1}{x}\ dx$
$= \left(\frac{e^2}{2} + 3e\right)\ln e - \left(\frac{1^2}{2} + 3\right)\ln 1 - \left[\left(\frac{x^2}{4} + 3x\right)\right]_1^e$
$= \left(\frac{e^2}{2} + 3e\right) - 0 - \left(\frac{e^2}{4} + 3e - \left(\frac{1^2}{4} + 3\right)\right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} + 3 = \frac{e^2}{4} + \frac{13}{4}$

$M = \int_0^3 \frac{(4x-3)}{\sqrt{2x^2-3x+16}} dx$
$= \left[2\sqrt{2x^2 - 3x + 16}\right]_0^3$
$= 2\sqrt{2\times 3^2 - 3\times 3 + 16} - 2\sqrt{2\times 0^2 - 3\times 0 + 16}$
$= 2\sqrt{25} - 2\sqrt{16} = 10 - 8 = 2$

Exercice 2 (50min)



La courbe ci-contre représente la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
Cette courbe passe par $A\left(1; \frac{1}{2e}\right)$ et $O(0; 0)$
Sur $[0; 1]$ elle est au-dessus du segment [0A] .
1) $\int_0^1 f'(x)\,dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{1}{2e} - 0 = \frac{1}{2e}$
La courbe représentative de est au-dessus de [OA] quand x est entre 0 et 1 donc $\forall x \in [0; 1]: f(x) \geq \frac{1}{2e}x$ donc $\int_0^1 f(x)\,dx \geq \int_0^1 \frac{x}{2e}dx$ or $\int_0^1 \frac{x}{2e}dx = \left[\frac{x^2}{2(2e)}\right]_0^1$ donc $\int_0^1 f(x)\,dx \geq \frac{1}{4e}$

En fait la fonction f est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2+1}$

2) $f(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2+1} = \frac{e^{-x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{e^x}\frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$ de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

3) On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$
$g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ or $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times 1 = -8$ donc $\forall x \in [0; +\infty[: g'(x) > 0$ donc g est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ de plus $g(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$ donc on a bien $0 \in [0; +\infty[$ donc d'après l'extension du théorème de la bijection $g(x) = 0$ admet une solution α unique sur $[0; +\infty[$

4) $f(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2+1}$ donc $f'(x) = \frac{(e^{-x} - xe^{-x})(x^2+1) - xe^{-x}2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^{-x}(1-x)(x^2+1) - 2x^2e^{-x}}{(x^2+1)^2} = \frac{e^{-x}[x^2+1-x^3-x-2x^2]}{(x^2+1)^2} = \frac{e^{-x}(-g(x))}{(x^2+1)^2}$
Ainsi sur $[0; +\infty[$ les fonctions $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signe contraires. On a donc f' positif sur $[0; \alpha]$ et négative sur $[\alpha; +\infty[$ donc f croissante sur le premier intervalle et décroissante sur le suivant.

5) a. On pose $h(x) = \frac{x}{x^2+1}$ et donc $h'(x) = \frac{(x^2+1) - x2x}{x^2+1} = \frac{(1-x^2)}{x^2+1} = \frac{(1-x)(1+x)}{x^2+1}$ donc h' est positif sur $[0; 1]$ puis négatif sur $[1 ; +\infty[$ donc h est croissante sur le premier intervalle et décroissante sur le second donc elle atteint son maximum en 1, il vaudra $\frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$ de plus le numérateur et le dénominateur étant positifs ou nuls sur $[0; +\infty[$ le quotient sera nécessairement supérieur ou égal à zéro. D'où : $0 \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$

b. e^{-x} étant positif strictement sur $[0; +\infty[$ on peut déduire de l'encadrement précédent que $0e^{-x} \leq \frac{xe^{-x}}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}e^{-x}$ et donc $\int_n^{2n} 0dx \leq \int_n^{2n} \frac{xe^{-x}}{x^2+1}dx \leq \int_n^{2n} \frac{1}{2}e^{-x}\,dx$ donc $0 \leq u_n \leq \left[\frac{-1}{2}e^{-x}\right]_n^{2n}$ donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n})$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(e^n)^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^n} - \frac{1}{(e^n)^2}\right) = 0$
donc par théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$