Chap 11 – Les lois à densité

I. Loi à densité sur un intervalle

On considère une expérience aléatoire et un univers associé Ω, muni d'une probabilité.

1) Variable aléatoire continue

Définition :

Une variable aléatoire continue X est une fonction qui a chaque issue de Ω associe un nombre réel d'un intervalle I de ℝ.

Exemple :

La variable aléatoire égale à la durée de bon fonctionnement d'un équipement produit en grande série est une variable aléatoire continue.

2) Loi de probabilité à densité

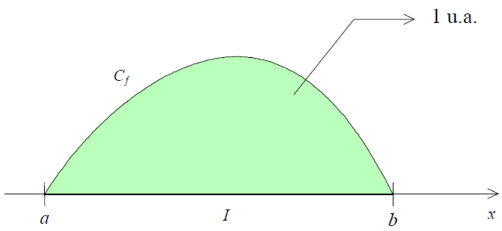
Définition :

X est une variable aléatoire continue à valeur s dans un intervalle I et f est une fonction continue, positive sur I telle que :

$$\int_I f(t)dt = 1$$

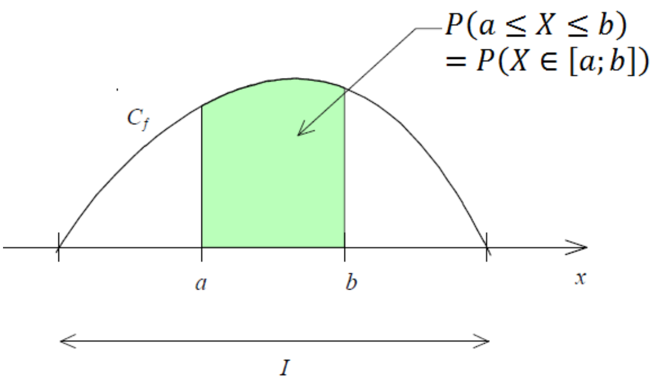
Dire que P est **la loi de probabilité de densité** f de X signifie que pour tout intervalle J inclus dans I, la probabilité $P(X \in J)$ est égale à l'aire du domaine :

$\{M(x;y); x \in J \text{ et } 0 \le u \le f(x)\}$



$\int_a^b f(t)dt = 1$ si I=[a ;b]

$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt = 1$ si $I = [a; +\infty[$



Conséquences :

1) Pour tout nombre réel c de I, $P(X = c) = 0$
   En effet, $P(X = c) = P(c \le X \le c) = \int_c^c f(t)dt = 0$
2) On en déduit immédiatement que :
   $P(c \le X \le d) = P(c \le X < d) = P(c < X \le d) = P(c < X < d)$
3) Si $I =]a; +\infty[$ et si c est un nombre réel tel que c>a :

$$P(X > c) = 1 - P(a < X < c) = 1 - \int_a^c f(t)dt$$

Remarques :

les propriétés des probabilités d'événements rencontrées dans le cas discret s'étendent naturellement au cas continu.

Par exemple :

- Si J' est le complémentaire de J dans I, alors $P(J') = 1 - P(J)$

Si I'∈ I et si $P(I') \neq 0$, si $J \subset I$, alors $P'_I(J) = \frac{P(I' \cap J)}{P(I')}$.

II. La loi uniforme sur [a ;b]

Définition
a et b désignent deux nombres réels distincts avec a<b.
dire qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle [a ;b] signifie que la densité de probabilité est une fonction constante sur [a ;b].

propriété :
La densité de probabilité de la loi uniforme sur [a ;b] est la fonction f définie sur [a ;b] par : $f(x) = \frac{1}{b-a}$.

Démonstration
f est une fonction constante sur [a ;b] par $f(x) = \delta$.
On doit avoir $\int_a^b \delta\, dt = 1$ c'est-à-dire $[\delta t]_a^b = 1$, soit $\delta b - \delta a = 1$. D'où $\delta = \frac{1}{b-a}$.

Propriété
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [a ;b].
Pour tout intervalle [c ;d] inclus dans [a ;b] : $P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$

Démonstration $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{1}{b-a} t\right]_c^d = \frac{1}{b-a} d - \frac{1}{b-a} c = \frac{d-c}{b-a}$

Remarques
- Par convention, choisir un nombre au hasard dans un intervalle [a ;b], c'est le choisir selon la loi uniforme sur [a ;b].
- En particulier, pour la loi uniforme sur [0 ;1] et pour tout nombre réels c et d de [0 ;1], $P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{1-0} = d - c$. Donc, la probabilité de choisir un nombre entre c et d est égale à la longueur de [c ;d]

Définition
L'espérance d'une variable aléatoire X de densité f sur [a ;b] est le nombre réel : $E(X) = \int_a^b t\, f(t) dt$

Cette définition prolonge au cadre continu la définition donnée de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

Propriété
X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur [a ;b].
Son espérance est $E(X) = \frac{a+b}{2}$

Démonstration $E(X) = \int_a^b t \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{1}{b-a} \frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2} \frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{1}{2} \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = \frac{b+a}{2}$

III. Les lois exponentielles

Définition
λ désigne un nombre réel strictement positif .
Dire qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre λ sur $[0; +\infty[$ signifie que sa densité de probabilité est définie sur $[0; +\infty[$ signifie que sa densité de probabilité est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$.

Propriétés
X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.
Pour tout intervalle [c ;d] inclus dans $[0; +\infty[$:
1) $P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$
2) $P(X \geq c) = e^{-\lambda c}$

Démonstration
1) $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_c^d = -e^{-\lambda d} + e^{-\lambda c} = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$

2) $P(X \geq c) = 1 - P(0 \leq X \leq c) = 1 - \left(e^{-\lambda 0} - e^{-\lambda c}\right) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda c}\right) = e^{-\lambda c}$

Propriété
L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Démonstration (IPP + changement de variable)
$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t \times \lambda\, e^{-\lambda t} dt$
Utilisons la technique d'intégration par partie pour déterminer $\int_0^x t \times \lambda\, e^{-\lambda t} dt$
On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}$ et on a donc : $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\, e^{-\lambda t}$
On sait que $\int u\, v' = [u\, v\,] - \int u' v$ Ainsi : $\int_0^x t \times \lambda\, e^{-\lambda t} dt = \left[-te^{-\lambda t}\right]_0^x - \int_0^x 1 \times (-\, e^{-\lambda t}) dt$

$$= -xe^{-\lambda x} - \left(-0e^{-\lambda 0}\right) - \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^x = -xe^{-\lambda x} - 0 - \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda 0}\right) = -xe^{-\lambda x} - \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

Donc $E(X) = \lim_{x \to +\infty} -xe^{-\lambda x} - \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\right)$
$-xe^{-\lambda x} = \frac{-1}{\lambda}\left(x\lambda e^{-\lambda x}\right)$ en posant $y = x\lambda$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x\lambda = +\infty \\ \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{-1}{\lambda}(ye^{-y}) = \frac{-1}{\lambda} \times 0 \end{cases}$ donc $\lim_{x \to +\infty} -xe^{-\lambda x} = 0$

De plus $\lim_{x \to +\infty} -xe^{-\lambda x} = 0$
On aura donc : $E(X) = \lim_{x \to +\infty} -xe^{-\lambda x} - \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\right) = 0 - \left(0 - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}$ CQFD