Correction du DM3

123P99

Partie 1

1.& 2. $f(x) = \frac{2x+1}{x^3-1}$

$\lim\limits_{x\to1^-} 2x+1 = 3$ et $\lim\limits_{x\to1^-} x^3-1 = 0^-$ donc par produit $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} 2x+1 = 3$ et $\lim\limits_{x\to1^+} x^3-1 = 0^+$ donc par produit $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

On a donc une asymptote verticale en $a = 1$ d'équation $x = 1$

Pour éviter une forme indéterminée en $+\infty$ et $-\infty$ factorisons :

$$f(x) = \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{x^2} \times \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^3}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^3}} = 2$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

De la même manière on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Nous avons donc la même asymptote horizontale d'équation $y = 0$ vers $-\infty$ comme vers $+\infty$.

Partie 2

1.

f est une fonction rationnelle (un quotient de deux polynômes) donc elle est dérivable sur son ensemble de définition : $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Je reconnais $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $= 2x+1$, $v = x^3-1$, $u' = 2$ et $v' = 3x^2$

$$f'(x) = \frac{2(x^3-1)-(2x+1)3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{2x^3-2-6x^3-3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{-4x^3-3x^2-2}{(x^3-1)^2}$$

2.

a) On pose $g(x) = -4x^3-3x^2-2$ et donc :

$g'(x) = -12x^2-6x = -6x(2x+1)$

On peut montrer facilement que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

x	$-\infty$		-0,5		0		1		$+\infty$
-6x		+		+	0	-		-	
2x+1		-	0	+		+		+	
g'(x)		-	0	+	0	+	‖	+	
g(x)	$+\infty$	↘	-2,25	↗	-2	↘	-9 ‖ $-\infty$	↘	$-\infty$

b) Sur $]-\infty;-0{,}5]$ la fonction est décroissante et continue on a :

$g(-0{,}5) = -2{,}25 \leq 0 \leq +\infty = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ (autrement dit 0 est bien une valeur intermédiaire dans l'intervalle image) et donc d'après **l'extension du théorème de la bijection** (ou encore l'extension du corollaire du TVI) 0 aura unique antécédent sur $]-\infty;-0{,}5]$ par la fonction g.

Après -0,5 :

Version courte : la fonction est majorée par -2 donc $g(x) = 0$ n'a pas d'antécédent

Version longue :On considère que la majoration est loin d'être triviale donc on détaille : la fonction g n'est pas définie en 1 mais $-4x^3-3x^2-2$ l'est, cette fonction est décroissante sur $[0;+\infty[$ et donne à 0 l'image -2.

Donc toutes les images seront plus petites que -2 sur cet intervalle, la fonction g correspond à une restriction de $-4x^3-3x^2-2$ à $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ donc ses images sur l'intersection de $[0;+\infty[$ et de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ seront aussi toutes plus petites que -2 donc $g(x) = 0$ n'aura pas de solution sur cette zone.

Sur $[-0{,}5;0]$ g est croissante et $g(0) = -2$ donc sur cet intervalle toutes les images sont plus petites que -2 et donc que 0 donc $g(x) = 0$ n'aura pas de solution sur cet intervalle.

Conclusion : 0 aura unique antécédent sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par la fonction g

c. Avec Excel :

=-4*E3^3-3*E3^2-2

D	E	F
	x	f(x)
	-1,137	0,001206
	-1,1369	0,000337
	-1,1368	-0,00053
	-1,1367	-0,0014
	-1,1366	-0,00227
	-1,1365	-0,00314
	-1,1364	-0,004

On a donc : $-1{,}1369 < \alpha < -1{,}1368$ et donc la meilleure valeur approchée à 10^{-3} sera :

-1,137

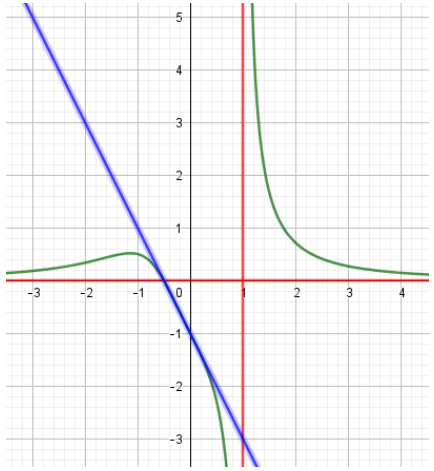
=-4*E4^3-3*E4^2-2

D	E	F
	x	f(x)
	-1,139	0,018631
	-1,138	0,009908
	-1,137	0,001206
	-1,136	-0,00747
	-1,135	-0,01613
	-1,134	-0,02477
	-1,133	-0,03339
	-1,132	-0,04198
	-1,131	-0,05056
	-1,13	-0,05911
	-1,129	-0,06764

d. g est positive avant α et négative après

3.

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$g(x)$		+	0	-		-	
$(x^3-1)^2$		+		+	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	
$f(x)$	0	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0



Partie 3

Partie 4

1.

f est dérivable en 0 donc l'équation de sa tangente en 0 sera donnée par la formule

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Ici $f'(0) = \frac{-4\times0^3-3\times0^2-2}{(0^3-1)^2} = \frac{-2}{1} = -2$ et $f(0) = \frac{2\times0+1}{0^3-1} = -1$

Donc l'équation de la tangente sera : $y = -2(x-0) + (-1)$

$y = -2x-1$

2.

Pour étudier la position de la courbe représentative de la fonction f par rapport à sa tangente en 0 se fait en étudiant le signe de :

$$h(x) = f(x) - (-2x-1) = \frac{2x+1}{x^3-1} + \frac{2x+1}{1} = \frac{2x+1}{x^3-1} + \frac{(2x+1)(x^3-1)}{x^3-1}$$

$$= \frac{2x+1+2x^4-2x+x^3-1}{x^3-1} = \frac{2x^4+x^3}{x^3-1} = \frac{x^3(2x+1)}{x^3-1}$$

x	$-\infty$		-0,5		0		1		$+\infty$
x^3		-		-	0	+		+	
$2x+1$		-	0	+		+		+	
x^3-1		-		-		-	0	+	
$h(x)$		-	0	+	0	-	‖	+	
Position de C par rapport à T		en-dessous		au-dessus		en-dessous	‖	Au-dessus	

Exercice 124

1.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et telle que $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas du même signe , alors d'après le théorème des valeurs intermédiaire , comme 0 est bien comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ on aura l'existence d'au moins un nombre dans $[a;b]$ que l'on nommera c tel que $f(c) = 0$

2.

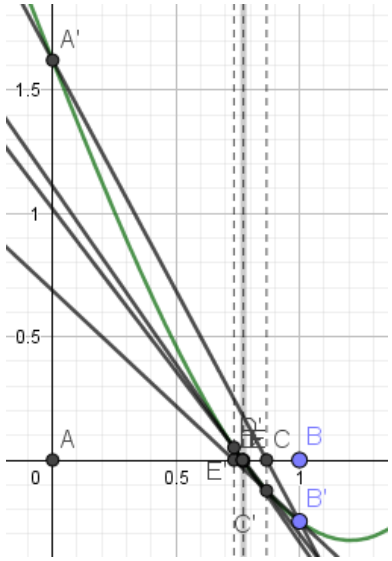
Je pose h la fonction sur $[a;b]$ qui à tout x associe le réel $h(x) = f(x) - g(x)$.

D'après l'énoncé h change de signe sur $[a;b]$ donc il y a au moins deux éléments de $[a,b]$ que l'on nommera e (le plus petit) et f tels que $f(a')$ et $f(b')$ ne soient pas de même signe.

h est continue sur $[a;b]$ en tant que différence de fonction continues et donc sur sur $[a';b']$ intervalle contenu dans sur $[a;b]$.

et donc d'après 1 utilisée dans l'intervalle sur $[a';b']$.

Il existe un nombre c dans $[a';b']$ et donc dans sur $[a;b]$ tel que $h(c) = 0$ donc tel que $f(c) - g(c) = 0$ c'est-à-dire tel que $f(c) = g(c)$



Exercice 125P100

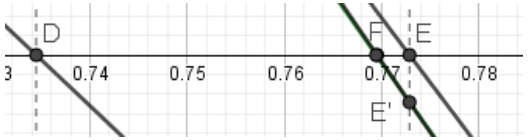
Partie 1 : construction graphique

Très rapidement on y voit plus rien :(cf grande figure à droite)

Avec quelques zoom autour de F c'est mieux , mais ça reste difficilement lisible et la partie algébre de géogebra arrondit à 10^{-2} donc on n'est pas très avancé.

En zoomant beaucoup on a F qui aura pour abscisse 0,76956

Qui est une approximation de la valeur qui nous intéresse qui arrondie à 10^{-5} est 0,76945



Partie 2

1.

On s'intéresse à l'équation de la droite (AB) son coefficient directeur est :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Toujours d'après le cours son ordonnée à l'origine sera :

$$p = y_B - a \times x_B = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\, b$$

Ainsi la droite (AB) a pour équation :

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} x + f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\, b \quad \Leftrightarrow y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b)$$

Remarque : si on n'a pas l'autre formule pour trouver l'ordonnée à l'origine on peut utiliser le fait que la droite (AB) passe par $B\big(b; f(b)\big)$ et donc :

$f(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times b + p$ et on finira avec le même résultat.

2.

On veut savoir quand est ce que la droite précédente coupe l'axe des abscisses, autrement on veut résoudre $y = 0 \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) = -f(b)$

$\Leftrightarrow (x-b) = -f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$

$\Leftrightarrow x = b - f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$

3. 4. 5.

C3 =B3 - (B3 - A3) / (f(B3) - f(A3)) f(B3)

	A	B	C	D
1	0	1	0.8671	
2	1	0.8671	0.73446	
3	0.8671	0.73446	0.77289	
4	0.73446	0.77289	0.76956	
5	0.77289	0.76956	0.76945	
6	0.76956	0.76945	0.76945	
7	0.76945	0.76945	0.76945	

6.

0,76945 semble être une bonne valeur arrondie.

Partie 3

La méthode par tableur est bien plus efficace, il suffit même de remplacer les valeurs initiales dans le tableau précédent pour trouver notre nouvelle solution.

La deuxième racine vaudra visiblement environ 1,60639

1.5	2	1.56482
2	1.56482	1.59103
1.56482	1.59103	1.60733
1.59103	1.60733	1.60637
1.60733	1.60637	1.60639
1.60637	1.60639	1.60639