Devoir surveillé de mathématiques n°1

Exercice 1 (29min+6min)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2-5x+3}{x-7}$ sur $D_f =]-\infty; 7[$.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2) Donner l'équation de l'asymptote évidente à C_f la courbe représentative de f.
3) Déterminer a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-7}$
4) En déduire l'équation de Δ l'asymptote oblique en $-\infty$ à la courbe représentant f.
5) Etudier la position de C_f par rapport à Δ.
6) Refaire les questions 1 et 2 pour g définie $D_g = \mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{3x^2-5x+4}{x^2+4x+5}$

Exercice 2 (10min)

Soit f la fonction définies sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-4x-21}{x-7} \ sur\ \mathbb{R}-\{7\} \\ f(7) = a \end{cases}$

Déterminer a pour que f soit continue en a.

Exercice 3 (10min)

Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 15x + 7$

1) Prouver l'existence et l'unicité de la solution α de l'équation $f(x) = 5$ dans [0 ;8]
2) Donner un encadrement à 10^{-3} de α

Exercice 4 (25min + 10min)

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to\frac{25}{4}^+} f(x)$ avec $f(x) = \frac{5-2\sqrt{x}}{50-8x}$

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{6}^-} i(x)$ avec $i(x) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\frac{1}{2}}$

$\lim\limits_{x\to7^-} g(x)$ avec $g(x) = \sqrt{-\frac{x^2-5x+3}{x-7}}$ (vous vous servirez des calculs fait à l'exercice 1)

$\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$ avec $k(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$

Bonus : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ avec $h(x) = x + 2 - \sqrt{x^2+3x+10}$

Exercice 5 (18min)

1) Démontrer que :

si $j(x) \leq k(x)$ au voisinage de $-\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} k(x) = -\infty$ **alors** $\lim\limits_{x \to -\infty} j(x) = -\infty$

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} E(x)$ avec E la fonction « partie entière de » telle qu'elle est définie dans le cours.

Exercice 6 (21min + 15 min)

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10% n'ont pas survécu, 75% deviennent rouges et les 15% restant deviennent gris.
- pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5% n'ont pas survécu, 65% deviennent rouges et les 30% restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60% au premier éleveur, 40% au second.
Soit A l'événement le poisson vient du premier élèvage
Soit M l'événement le poisson meurt entre le deuxième et le troisième mois.
Soit R l'événement le poisson devient rouge entre le deuxième et le troisième mois.
Soit G l'événement le poisson devient gris entre le deuxième et le troisième mois.

1. Un enfant achète un poison le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.
1.a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est 0, 92.
1.b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.
1.c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

Bonus

2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, 0,25 euro s'il est gris et **perd** 0,10 euro s'il ne survit pas.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté.
Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

Bac juin 2008 Nouvelle calédonie

Devoir surveillé de mathématiques n°1

Exercice 1

1) 10min

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ?$ $\qquad f(x) = \frac{x^2-5x+3}{x-7} = \frac{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{7}{x}\right)} = x\frac{1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{7}{x}}$

or $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{7}{x}} = 1 \end{cases}$ donc par limite de produit : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to7^-} f(x) = ?$ $\qquad \begin{cases} \lim_{x\to7^-} x^2-5x+3 = 17 \\ \lim_{x\to7^-} x-7 = 0^- \end{cases}$ donc par limite de quotient : $\lim_{x\to7^-} f(x) = -\infty$

$g(x) = \frac{3x^2-5x+4}{x^2+4x+5} = \frac{x^2\left(3-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)} = \frac{3-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}} = 3$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}} = 3$

2) 3min

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 3$

donc la courbe représentative de la fonction g admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$

$\lim_{x\to7^-} f(x) = -\infty$

donc la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 7$

3) 6min

$ax + b + \frac{c}{x-7} = \frac{(ax+b)(x-7)+c}{x-7} = \frac{ax^2+(b-7a)+c-7b}{x-7}$

Pour x différent de 7 on a : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-7} \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+3}{x-7} = \frac{ax^2+(b-7a)+c-7b}{x-7}$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = ax^2 + (b-7a) + c - 7b \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a \\ -5 = b - 7a \\ 3 = c - 7b \end{cases}$ par identification

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a \\ 2 = b \\ 3 = c - 7b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a \\ 2 = b \\ 17 = c \end{cases}$ donc $f(x) = x + 2 + \frac{17}{x-7}$

4) 3min $\qquad$ Soit Δ la droite d'équation $y = x + 2$

$f(x) - y = x + 2 + \frac{17}{x-7} - (x+2) = \frac{17}{x-7}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) - y = \lim_{x\to-\infty} \frac{17}{x-7} = 0$ $\qquad$ donc Δ a pour équation $y = x + 2$

5) 1min30

$f(x) - y = \frac{17}{x-7}$ or sur $]-\infty; 7[$ $x - 7 < 0$ et donc $f(x) - y$ aussi, et donc C_f est sous Δ

Exercice 2 $\quad$ 7 min

$\frac{x^2-4x-21}{x-7} = ?$ $\quad$ Factorisons le numérateur : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 16 + 84 = 100$

$x_1 = \frac{4-10}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{4+10}{2} = 7$ donc : $x^2 - 4x - 21 = (x+3)(x-7)$

Ainsi si $x \in \mathbb{R} - \{7\}$, $\frac{x^2-4x-21}{x-7} = \frac{(x+3)(x-7)}{x-7} = x + 3$

Donc $\lim_{x \to 7} f(x) = \lim_{x \to 7} x + 3 = 10$
En posant $a = 10$ on aura $\lim_{x \to 7} f(x) = 10 = f(7)$

Exercice 3
5+1 min
1) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 15x + 7$ donc $f'(x) = -3x^2 + 12x - 15$
$\Delta = 12^2 - 4 \times (-3) \times (-15) = -36$ donc $f'(x)$ est négative strictement sur $\mathbb{R}$ et donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (donc sur [0 ;8])
De plus en tant que fonction polynomiale elle sera continue sur $\mathbb{R}$ (donc sur [0 ;8])
$f(0) = 7$ et $f(8) = -241$ et donc 5 est compris entre les images de 0 et 8
Ainsi d'après le théorème de la bijection appliqué sur [0 ;8] , 5 aura un unique antécédent α par f sur [0 ;8].
2) en utilisant l'approche graphique on trouve $0{,}141 < \alpha < 0{,}142$

Exercice 4
Déterminer les limites suivantes : (5+4+5+6+2+2)

$\lim_{x \to \frac{25}{4}^+} f(x)$ avec $f(x) = \frac{5-2\sqrt{x}}{50-8x}$

$f(x) = \frac{5-2\sqrt{x}}{50-8x} = \frac{(5-2\sqrt{x})(5+2\sqrt{x})}{(50-8x)(5+2\sqrt{x})} = \frac{25-4x}{(50-8x)(5+2\sqrt{x})} = \frac{25-4x}{2(25-4x)(5+2\sqrt{x})} = \frac{1}{2(5+2\sqrt{x})}$

$\lim_{x \to \frac{25}{4}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{25}{4}^+} \frac{1}{2(5+2\sqrt{x})} = 0{,}05$

$\lim_{x \to 7^-} g(x)$ avec $g(x) = \sqrt{-\frac{x^2-5x+3}{x-7}}$ (vous vous servirez des calculs fait à l'exercice 1)

$\lim_{x \to 7^-} \frac{x^2-5x+3}{x-7} = -\infty$ donc $\lim_{x \to 7^-} -\frac{x^2-5x+3}{x-7} = +\infty$

De plus $\lim_{y \to +\infty} \sqrt{y} = +\infty$ donc $\lim_{x \to 7^-} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} h(x)$ avec $h(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 3x + 10}$

Avec x> 0 $h(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 3x + 10} = \frac{(x+2-\sqrt{x^2+3x+10})(x+2+\sqrt{x^2+3x+10})}{x+2+\sqrt{x^2+3x+10}} = \frac{(x+2)^2-(x^2+3x+10)}{x+2+\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{10}{x^2}}}$

$= \frac{x-6}{x+2+\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{10}{x^2}}} = \frac{x\left(1-\frac{6}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{10}{x^2}}\right)} = \frac{1-\frac{6}{x}}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{10}{x^2}}}$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-\frac{6}{x}}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{10}{x^2}}} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to -\frac{\pi}{6}^-} i(x)$ avec $i(x) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\frac{1}{2}}$

$\lim_{x \to -\frac{\pi}{6}^-} \frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{6}^-$ donc $\lim_{x \to -\frac{\pi}{6}^-} \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2}^-$ donc $\lim_{x \to -\frac{\pi}{6}^-} \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \frac{1}{2} = 0^-$

donc $\lim_{x \to -\frac{\pi}{6}^-} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\frac{1}{2}} = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} j(x)$ avec $j(x) = x - \cos(x)$

$j(x) \leq x+1$ or $\lim\limits_{x \to -\infty} x+1 = -\infty$ donc on aura $\lim\limits_{x \to -\infty} j(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} k(x)$ avec $k(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$ $\quad -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} +\frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = 0$

Exercice 5 (10min +2min)

1) Démontrer que **si** $\mathrm{j(x)} \leq \mathrm{k(x)}$ au voisinage de $-\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{j(x)} = +\infty$ **alors** $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{j(x)} = -\infty$

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} E(x)$ avec E la fonction « partie entière de » telle qu'elle est définie dans le cours.

1) Supposons que l'on ait : $\mathrm{j(x)} \leq \mathrm{k(x)}$ au voisinage de $-\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{k(x)} = -\infty$

Alors en prenant A un réel on aura

$\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\infty; x_0[, \mathrm{k(x)} < \mathrm{A}$ et $\exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\infty; B], \mathrm{j(x)} \leq \mathrm{k(x)}$

En prenant $x_1 = \min(B, x_0)$

$\forall x \in]-\infty; x_1[$ on aura $x \in]-\infty; x_0[$ et donc $\mathrm{k(x)} < \mathrm{A}$

Et on aura $x \in]-\infty; B[$ et donc $\mathrm{j(x)} \leq \mathrm{k(x)}$

Et donc on a : $\mathrm{j(x)} \leq \mathrm{k(x)} < \mathrm{A}$ donc $j(x) < A$

Ça sera valable pour tout A donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{j(x)} = -\infty$

2) on a pour tout réel x : $E(x) < x+1$ de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{x} + 1 = -\infty$ donc d'après le théorème d'encadrement de la question précédente on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{E(x)} = -\infty$

Exercice 6

1. Un enfant achète un poison le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.

1.a. $P(M) = P(M \cap A) + P(M \cap \bar{A})$

$= P(A)P_A(M) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(M)$ formule de probabilité totales

$= 0{,}6 \times 0{,}1 + 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}06 + 0{,}02 = 0{,}08$

$P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$

1.b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

$P(R) = P(R \cap A) + P(R \cap \bar{A})$

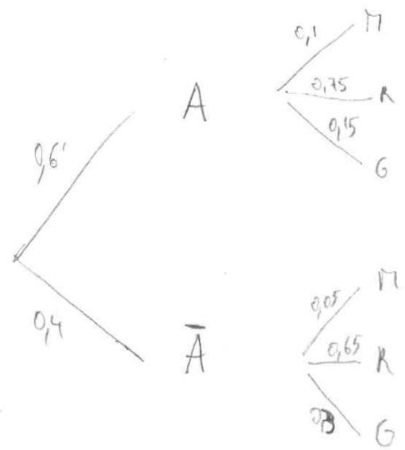
$= P(A)P_A(R) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(R)$ formule de probabilité totales

$= 0{,}6 \times 0{,}75 + 0{,}4 \times 0{,}65 = 0{,}45 + 0{,}26 = 0{,}71$

1.c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

$P(G) = 1 - P(M) - P(R) = 0{,}92 - 0{,}71 = 0{,}21$

$P_G(A) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{P(A)P_A(G)}{P(G)} = \frac{0{,}6 \times 0{,}15}{0{,}21} = \frac{0{,}09}{0{,}21} = \frac{3}{7}$



2.

Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de poisson vivants

Les expériences étant indépendantes et à deux issues possibles M et $\bar{M}$ on est confronté à une binomiale de paramètres 5 et 0,92

$P(Y=3) = \binom{5}{3} 0{,}92^3 0{,}08^2 = 10 \times 0{,}778688 \times 0{,}0064 \approx 0{,}05$

3.

x_i	1	0,25	-0,1
$P(X = x_i)$	0,71	0,21	0,08

$E(X) = 0{,}1 \times 0{,}71 + 0{,}25 \times 0{,}21 - 0{,}1 \times 0{,}08 = 0{,}1155$