LIMITES DE SUITES ET DE FONCTIONS

Donner les limites suivantes.
Détaillez les justifications sur une feuille à part et faites apparaître éventuellement les règles opératoires.

1	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^3 + 7x^2 - 5}{1 + x + x^2} =$		2	$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-4x + 3}{3x^2 + 1} =$
3	$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \dfrac{-5x}{3 - x} =$		4	$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \dfrac{3x^2 - 5x}{x^2 + 4x + 3} =$
5	$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{3x^2 - 5x}{x^2 + 4x + 3} =$		6	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{(n + 3)(n + 5)} =$
7	$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \sqrt{\dfrac{1 - x}{x + 2}} =$		8	$\lim\limits_{x \to 2} \sin \dfrac{1}{x} =$
9	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 4} =$		10	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x}} =$
11	$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} - n =$		12	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - 2x =$
13	$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{1 - 3x^2} =$		14	$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 2}} =$
15	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x - 1 =$		16	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + \frac{1}{n}}{2n^2 + 1} =$
17	$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 4} =$		18	$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 6} - 3}{x - 3} =$
19	$\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{2x} - 4}{\sqrt{x + 1} - 3} =$		20	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + 5} - x}{\sqrt{x^2 - x}} =$
21	$\lim\limits_{x \to +\infty} \cos \dfrac{1}{x} =$		22	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} =$

LIMITES DE SUITES ET DE FONCTIONS

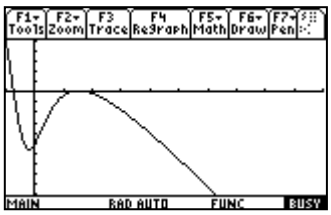
1	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^3 + 7x^2 - 5}{1 + x + x^2} = -\infty$
2	$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-4x + 3}{3x^2 + 1} = 0$
3	$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \dfrac{-5x}{3 - x} = +\infty$
4	$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \dfrac{3x^2 - 5x}{x^2 + 4x + 3} = -\infty$
5	$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{3x^2 - 5x}{x^2 + 4x + 3} = +\infty$
6	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{(n + 3)(n + 5)} = 0$
7	$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \sqrt{\dfrac{1 - x}{x + 2}} = 0$
8	$\lim\limits_{x \to 2} \sin \dfrac{1}{x} = \sin \dfrac{1}{2}$
9	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 4} = 1$
10	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x}} = +\infty$
11	$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} - n = -\infty$
12	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - 2x = -\infty$
13	$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{1 - 3x^2} = -\dfrac{2}{3}$
14	$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 2}} = +\infty$
15	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x - 1 = -\dfrac{3}{2}$
16	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + \frac{1}{n}}{2n^2 + 1} = \dfrac{1}{2}$
17	$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 4} = -1$
18	$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 6} - 3}{x - 3} = \dfrac{1}{6}$
19	$\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{2x} - 4}{\sqrt{x + 1} - 3} = \dfrac{3}{2}$
20	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + 5} - x}{\sqrt{x^2 - x}} = -1$
21	$\lim\limits_{x \to +\infty} \cos \dfrac{1}{x} = 1$
22	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} = 0$

1	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^3 + 7x^2 - 5}{1 + x + x^2} = -\infty$

Utilisation d'une règle opératoire :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^3 + 7x^2 - 5}{1 + x + x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} -3x = -\infty$$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :

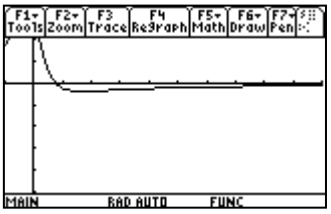


2	$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-4x + 3}{3x^2 + 1} = 0$

Utilisation d'une règle opératoire

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-4x + 3}{3x^2 + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x}{3x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4}{3x} = 0$$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :

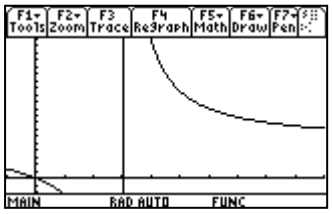


3	$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \dfrac{-5x}{3 - x} = +\infty$

$x > 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > 3 - x \quad \Leftrightarrow \quad 3 - x < 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} 3 - x = 0^-$

D'autre part $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} -5x = -15$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \dfrac{-5x}{3 - x} = +\infty$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :



4	$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \dfrac{3x^2 - 5x}{x^2 + 4x + 3} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} 3x^2 - 5x = 27 + 15 = 42$

$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} x^2 + 4x + 3 = 9 - 12 = 3 = 0$

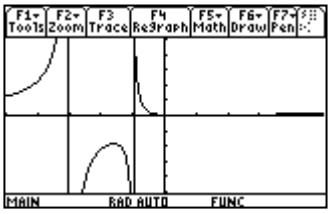
En remarquant que $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$, on peut donner le signe de $x^2 + 4x + 3$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$x^2 + 4x + 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que

$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} x^2 + 4x + 3 = 0^-$ et comme $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} 3x^2 - 5x = 42$, on en déduit $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \dfrac{3x^2 - 5x}{x^2 + 4x + 3} = -\infty$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :



5	$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{3x^2 - 5x}{x^2 + 4x + 3} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 3x^2 - 5x = 3 + 5 = 8$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} x^2 + 4x + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$

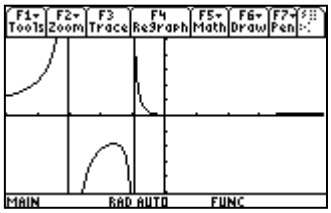
En remarquant que $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$, on peut donner le signe de $x^2 + 4x + 3$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$x^2 + 4x + 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} x^2 + 4x + 3 = 0^+$ et comme $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 3x^2 - 5x = 8$, on en déduit $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{3x^2 - 5x}{x^2 + 4x + 3} = +\infty$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :

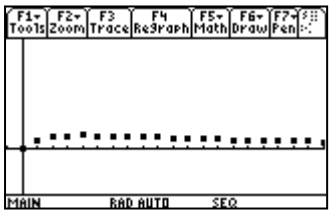


6	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{(n+3)(n+5)} = 0$

Utilisation d'une règle opératoire

$$\frac{n}{(n+3)(n+5)} = \frac{n}{n^2 + 8n + 15} \quad \text{donc} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{(n+3)(n+5)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :

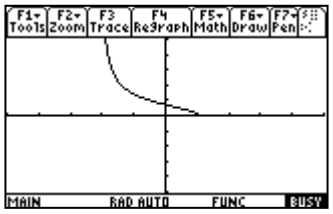


7	$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}} = 0$

$x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x > 0$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 1 - x = 0^+ \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x + 2 = 3 \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{1-x}{x+2} = 0^+ \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \sqrt{\frac{1-x}{x+2}} = 0^+$$

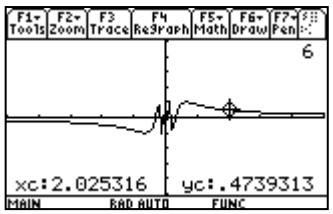
On peut vérifier le résultat sur un graphique :



8	$\lim\limits_{x \to 2} \sin \dfrac{1}{x} = \sin \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to 2} \sin \frac{1}{x} = \sin \frac{1}{2}$$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :



9	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+4} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 4 = +\infty$

Il s'agit donc d'une forme indéterminée de type $\dfrac{\infty}{\infty}$

On peut factoriser le terme dominant

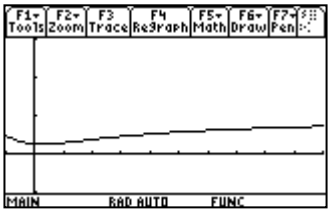
$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+4} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)} = \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{4}{x}}$$ (x tend vers $+\infty$, donc x est positif)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{4}{x} = 1$

On en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{4}{x}} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+4} = 1$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :



10	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{x}} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ on a donc une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$

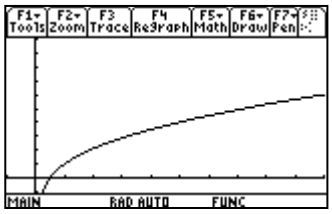
On peut factoriser le terme dominant

$$\frac{2x-1}{\sqrt{x}} = \frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\left(2-\frac{1}{x}\right)$$ parce que $x = (\sqrt{x})^2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \dfrac{1}{x} = 2$ et de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(2-\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{x}} = +\infty$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :



11	$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} - n = -\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$ on a donc une forme indéterminée du type $+\infty - \infty$

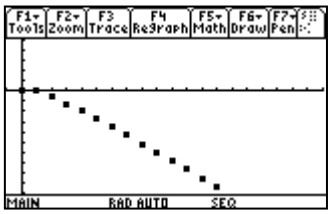
On peut factoriser le terme dominant

$\sqrt{n} - n = n\left(\frac{\sqrt{n}}{n} - 1\right) = n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right)$ parce que $n = (\sqrt{n})^2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 = -1$ de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right) = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} - n = -\infty$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :



12	$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - 2x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x + 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = +\infty$, d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} - 2x = -\infty$

On a donc une forme indéterminée du type $+\infty - \infty$

On peut factoriser le terme dominant

$$\sqrt{x^2 - x + 1} - 2x = \sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - 2x = x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x = x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2\right)$$

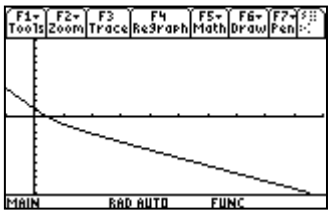
(x tend vers $+\infty$, donc x est positif et $\sqrt{x^2} = x$)

On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 = -1$

d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2\right) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - 2x = -\infty$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :

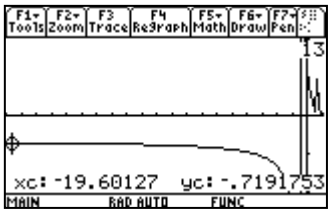


13	$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{1 - 3x^2} = -\dfrac{2}{3}$

On peut utiliser une règle opératoire

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - 3x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{-3x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :

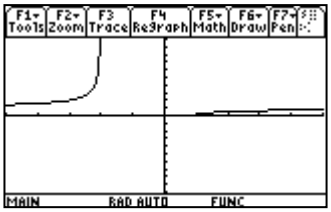


14	$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 2}} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} x - 1 = -2 - 1 = -3$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} x + 2 = 0^-$ (si $x < -2$, on a $x + 2 < 0$)

donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \dfrac{x - 1}{x + 2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 2}} = +\infty$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :



15	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x - 1 = -\frac{3}{2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x - 1$ conduit à une forme indéterminée du type $+\infty - \infty$

La factorisation du terme dominant ne permet pas de lever l'indétermination.
On peut utiliser la quantité conjuguée.

$$\sqrt{x^2 - x + 1} - x - 1 = \sqrt{x^2 - x + 1} - (x + 1) = \frac{\left[\sqrt{x^2 - x + 1} - (x + 1)\right]\left[\sqrt{x^2 - x + 1} + (x + 1)\right]}{\left[\sqrt{x^2 - x + 1} + (x + 1)\right]}$$

$$= \frac{x^2 - x + 1 - (x + 1)^2}{\left[\sqrt{x^2 - x + 1} + (x + 1)\right]} = \frac{x^2 - x + 1 - x^2 - 2x - 1}{\left[\sqrt{x^2 - x + 1} + (x + 1)\right]}$$

$$= \frac{-3x}{\left[\sqrt{x^2 - x + 1} + (x + 1)\right]} = \frac{-3x}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x + 1}$$

$$= \frac{-3x}{x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x + 1} = \frac{-3x}{x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}\right)}$$

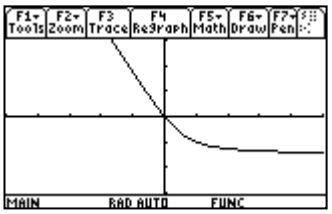
$$= \frac{-3}{\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}\right)}$$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3}{\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}\right)} = -\frac{3}{2}$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x - 1 = -\frac{3}{2}$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :



16	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + \frac{1}{n}}{2n^2 + 1} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + \frac{1}{n}}{2n^2 + 1}$ fait apparaître une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$

On peut se ramener à une règle opératoire en écrivant

$$\frac{n^2 + \frac{1}{n}}{2n^2 + 1} = \frac{n\left(n^2 + \frac{1}{n}\right)}{n\,(2n^2 + 1)} = \frac{n^3 + 1}{2n^3 + n}$$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3 + 1}{2n^3 + n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3}{2n^3} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + \frac{1}{n}}{2n^2 + 1} = \dfrac{1}{2}$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :

17	$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+4} = -1$

La recherche de la limite aboutit à une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$

On peut factoriser le terme dominant

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+4} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}$$

Or x tendant vers $-\infty$, x est négatif, et par conséquent $|x| = -x$
On a donc

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+4} = \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)} = \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{4}{x}}$$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \frac{4}{x} = 1$

On en déduit $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{4}{x}} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{4}{x}} = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+4} = -1$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :

18	$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3} = \dfrac{1}{6}$

$\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+6} - 3 = \sqrt{9} - 3 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 3} x - 3 = 0$

On est donc conduit à une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$.

En l'absence de factorisation évidente, on peut utiliser la quantité conjuguée.

$$\frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3} = \frac{(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+6} + 3)}{(x - 3)(\sqrt{x+6} + 3)} = \frac{x + 6 - 9}{(x - 3)(\sqrt{x+6} + 3)} = \frac{x - 3}{(x - 3)(\sqrt{x+6} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x+6} + 3}$$

On a $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+6} + 3 = \sqrt{9} + 3 = 6$ donc $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{\sqrt{x+6} + 3} = \dfrac{1}{6}$ donc $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3} = \dfrac{1}{6}$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :

19	$\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{2x} - 4}{\sqrt{x+1} - 3} = \dfrac{3}{2}$

$\lim\limits_{x \to 8} \sqrt{2x} - 4 = \sqrt{16} - 4 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 8} \sqrt{x+1} - 3 = \sqrt{9} - 3 = 0$

On est donc conduit à une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$.

En l'absence de factorisation évidente, on peut utiliser les quantités conjuguées.

$$\frac{\sqrt{2x} - 4}{\sqrt{x+1} - 3} = \frac{(\sqrt{2x} - 4)(\sqrt{2x} + 4)(\sqrt{x+1} + 3)}{(\sqrt{x+1} - 3)(\sqrt{x+1} + 3)(\sqrt{2x} + 4)} = \frac{(2x - 16)(\sqrt{x+1} + 3)}{(x + 1 - 9)(\sqrt{2x} + 4)}$$
$$= \frac{2(x - 8)(\sqrt{x+1} + 3)}{(x - 8)(\sqrt{2x} + 4)} = \frac{2(\sqrt{x+1} + 3)}{\sqrt{2x} + 4}$$

$\lim\limits_{x \to 8} 2(\sqrt{x+1} + 3) = 2(\sqrt{9} + 3) = 12$ et $\lim\limits_{x \to 8} \sqrt{2x} + 4 = \sqrt{16} + 4 = 8$

donc $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{2(\sqrt{x+1} + 3)}{\sqrt{2x} + 4} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$ donc $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{2x} - 4}{\sqrt{x+1} - 3} = \dfrac{3}{2}$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :

20	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+5} - x}{\sqrt{x^2 - x}} = -1$

La recherche de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+5} - x}{\sqrt{x^2 - x}}$ conduisant à une forme indéterminée, on peut factoriser le terme dominant

Comme x tend vers $+\infty$, on a x positif et on aura par conséquent $\sqrt{x^2} = |x| = x$

$$\frac{\sqrt{x+5} - x}{\sqrt{x^2 - x}} = \frac{\sqrt{x\left(1 + \frac{5}{x}\right)} - x}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)}} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - x}{x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{x\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1\right)}{x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{5}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{5}{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1 + \frac{5}{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 1$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+5} - x}{\sqrt{x^2 - x}} = -1$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :

21	$\lim\limits_{x \to +\infty} \cos \frac{1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos \frac{1}{x} = \cos 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos \frac{1}{x} = 1$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :

22	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + 1 = +\infty$

On a donc une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$

On peut factoriser $\sqrt{n}$

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(n\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{1}{n\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n\sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}} = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} = 0$

On peut vérifier le résultat sur un graphique :