Exercice 1 (11min)

1) Simplifier $\frac{e^{-5x}\left(e^{3x}\right)^8}{e^{5-3x}} = \frac{e^{-5x}e^{24x}}{e^{5-3x}} = \frac{e^{19x}}{e^{5-3x}} = e^{19x}e^{-(5-3x)} = e^{19x-5+3x} = e^{22x-5}$
2) Soit $f(x) = e^x - 5x^3 + 7$ et $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
   a. Dériver les trois fonctions
   $f'(x) = e^x - 15x^2$
   $h'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
   b. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$
   $f(x) = x^3\left(\frac{e^x}{x^3} - 5 + \frac{7}{x^3}\right)$ or $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^3} - 5 + \frac{7}{x^3} = -5$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
   $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} e^y = +\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$

Exercice 2 (13min) Soit $u_n = \frac{5n+7}{3n+2}$

1) Donner un minorant de la suite. $\forall n \in \mathbb{N}, 5n + 7 > 0\ et\ 3n + 2 > 0$ donc $u_n > 0$ donc la suite admet 0 comme minorant
2) Donner le sens de variation de la suite. Si on pose $f(x) = \frac{5x+7}{3x+2}$ définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$,on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$. De plus $f'(x) = \frac{5(3x+2)-(5x+7)3}{(3x+2)^2} = \frac{-11}{(3x+2)^2}$ donc f est croissante sur $]-\frac{2}{3}; +\infty[$ donc la suite (u_n) est décroissante.
3) en déduire son plus petit majorant, ça sera $u_0 = \frac{7}{2} = 3{,}5$
4) Que peut-on déduire des réponses aux questions 1 et 2, elle est décroissante et minorée donc elle converge.
5) Donner la limite de la suite quand n tend vers $+\infty$
   $f(x) = \frac{5x+7}{3x+2} = \frac{x\left(5+\frac{7}{x}\right)}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)} = \frac{\left(5+\frac{7}{x}\right)}{\left(3+\frac{2}{x}\right)}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{5}{3}$

Exercice 4 29min

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x-1} + 1$

Partie A : étude de fonction

1) Déterminer la limite de f en$-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
   $f(x) = xe^xe^{-1} + 1$ or $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ donc on a une asymptote horizontale ver $-\infty$ d'équation $y = 1$
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
3) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivé : $f'(x) = e^{x-1} + x1e^{x-1} = (x+1)e^{x-1}$
4) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$
   Sur $]-\infty; -1]$ $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante, Sur $[1; +\infty[$ $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a qui passe par l'origine du repère.

1) On appelle T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
   $y = f'(a)(x-a) + f(a) \Leftrightarrow y = (a+1)e^{a-1}(x-a) + (ae^{a-1} + 1)$
   $\Leftrightarrow y = (a+1)e^{a-1}x - a(a+1)e^{a-1} + (ae^{a-1} + 1)$
   Le coefficient directeur est : $(a+1)e^{a-1}$ et
   L'ordonnée à l'origine : $-a(a+1)e^{a-1} + (ae^{a-1} + 1) = e^{a-1}(-a^2) + 1$
2) Démontrer qu'une tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité : $1 - a^2e^{a-1} = 0$
   Dire que la tangente passe par l'origine revient à dire que l'ordonnée à l'origine est nulle donc que $1 - a^2e^{a-1} = 0$
3) Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$ de l'équation $1 - x^2e^{x-1} = 0$
   Si on pose $g(x) = 1 - x^2e^{x-1}$ une fonction dérivable et donc continue.

$g'(x) = -2xe^{x-1} - x^2 1e^{x-1} = -e^{x-1}(2x + x^2) = -xe^{x+1}(2 + x)$ or x, e^{x+1} et (2+x) sont toutes strictement positives sur $]0; +\infty[$ donc $g'(x) < 0$ sur cet intervalle donc g est stritctement décroissante sur l'intervalle, de plus $g(x) = 1 - x^2 e^x e^{-1}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = g(0) = 1$

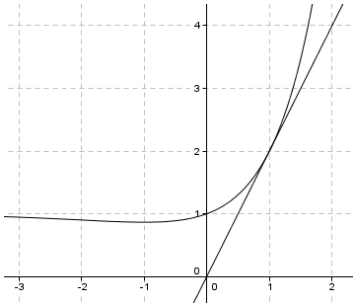
De plus $0 \in]-\infty; 1[$ l'ensemble des images

Ainsi d'après l'extension du théorème de la bijection il existe un unique antécédent par g de 0 dans l'intervalle : $]-\infty; 1[$, il se trouve que $g(1) = 0$ donc cette solution est 1.

4) Donner alors une équation de la tangente recherchée.

Dans la question 3 on vient d'établir que $1 - a^2 e^{a-1} = 0$ n'avait qu'une solution : 1

donc la droite recherchée sera nécessairement la tangente en a=1. Son équation sera nécessairement : $y = (1 + 1)e^{1-1}x \Leftrightarrow y = 2x$



Extrait du Baccalauréat S Antilles-Guyane 2012

Exercice 5 29min

Partie I : algorithme

Compléter le tableau ci-dessous en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et $N = 2$.

Les valeurs de u et de v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9	4	9
1	6,5	6,964	6,5	6,964
2	6,732	6,736	6,732	6,736

Partie II : approche classique

Dans la suite a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites(u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = a$ et $v_0 = b$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$

1) a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \; et \; v_n > 0$

Je pose P_n : « $u_n > 0 \; et \; v_n > 0$ »

Initialisation : vu que $0 < a < b$ et que $u_0 = a$ et $v_0 = b$ P_0est vraie

Hérédité : soit k un entier tel que $P_k$est vrai alors :

$u_k > 0 \; et \; v_k > 0$ donc $\frac{u_k + v_k}{2}$ et $\sqrt{\frac{u_k^2 + v_k^2}{2}}$ aussi et donc $u_k > 0$ et $v_{k+1} > 0$

donc P_{k+1} est vraie d'où l'hérédité.

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \; et \; v_n > 0$

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$

$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}^2 - \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \frac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2}{4} = \frac{2u_n^2 + 2v_n^2}{4} - \frac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2}{4}$

$= \frac{u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2}{4} = \frac{u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2}{4} = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$.

On vient de prouver que $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 \geq 0$ et donc $v_{n+1}^2 \geq u_{n+1}^2$ donc $\sqrt{v_{n+1}^2} \geq \sqrt{u_{n+1}^2}$ donc $v_n \geq u_n$ (on avait établit que ces termes étaient positifs)

2) a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{2}$ or $v_n \geq u_n$ donc $\frac{v_n - u_n}{2} \geq 0$

donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc la suite est croissante

b) comparer v_{n+1}^2 et v_n^2 et en déduire le sens de variation de la suite (v_n).

$v_{n+1}^2 - v_n^2 = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}^2 - v_n^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - v_n^2 = \frac{u_n^2 - v_n^2}{2}$ or $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 \geq 0$ donc $\frac{u_n^2 - v_n^2}{2} \leq 0$

Donc $v_{n+1}^2 - v_n^2 \leq 0$ et de la même manière qu'à la question précédente on a :

$v_{n+1} \leq v_n$ donc la suite (v_n) est décroissante

3) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

On a (v_n) est décroissante et minorée par 0 elle est donc convergente,

(u_n) est croissante , $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq v_0$ (car (v_n) est décroissante) donc (u_n) est majorée et donc elle converge. Donc une suite croissante l'autre décroissante