Devoir surveillé n°3

Exercice 1

1) Simplifier $\frac{e^{-5x}\left(e^{3x}\right)^8}{e^{5-3x}}$
2) Soit $f(x) = e^x - 5x^3 + 7$ et $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
   a. Dériver les deux fonctions
   b. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$

Exercice 2

Soit $u_n = \frac{5n+7}{3n+2}$

1) Donner un minorant de la suite.
2) Donner le sens de variation de la suite,
3) en déduire son plus petit majorant
4) Que peut-on déduire des réponses aux questions 1 et 2
5) Donner la limite de la suite quand n tend vers $+\infty$

Exercice 3

Partie I : algorithme

Compléter le tableau ci-dessous en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et $N = 2$.
Les valeurs de u et de v seront arrondies au millième.

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a Saisir un réel strictemenl positif non nul b ($b > a$) Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	TANTQUE $n < N$ Affecter à n la valeur $n+1$ Affecter à u la valeur $\frac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v
Sortie	Afficher u, afficher v

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Partie II : approche classique

Dans la suite a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.
On considère les suites(u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = a$ et $v_0 = b$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$

1) a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \; et \; v_n > 0$
   b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$
   En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$.
2) a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   b) comparer v_{n+1}^2 et v_n^2 et en déduire le sens de variation de la suite (v_n).
3) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Exercice 4

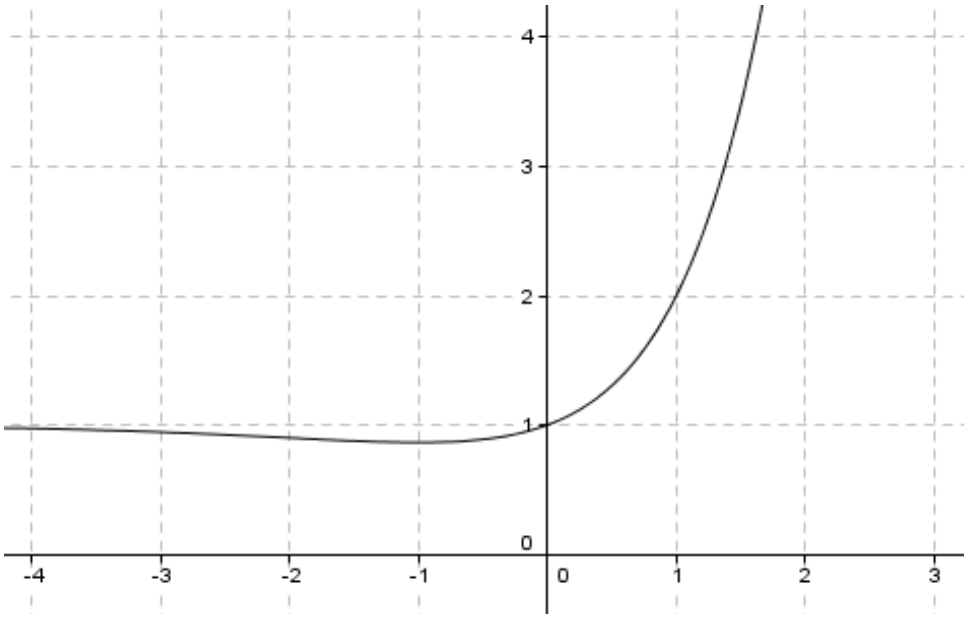
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x-1} + 1$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

Partie A : étude de fonction

1) Déterminer la limite de f en$-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivable.
   Montrer que pour tout réel$x$, $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$.
4) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a qui passe par l'origine du repère.

1) On appelle T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
   On attend que vous exprimiez le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine en fonction de a (ça va vous donner des expressions chargées, attention aux étourderies)
2) Démontrer qu'une tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité : $1 - a^2e^{a-1} = 0$
3) Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0;+\infty[$ de l'équation $1 - x^2e^{x-1} = 0$
4) Donner alors une équation de la tangente recherchée.
5) Tracez la tangente dans la figure ci - dessous.