TD : découverte de la fonction exponentielle

Prérequis : $(\boldsymbol{fog})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) \times (\boldsymbol{f}'\boldsymbol{og})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{f}'\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big)$

Partie I

On admet qu'il existe au moins une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et associant à 0 l'image 1, montrons l'unicité d'une telle fonction.

1) Soit f une de ces fonctions h la fonction définie par $h(x) = f(x)f(-x)$
   a. montrer qu'elle est constante
   b. quelle est la constante en question
2) que se passerait-il pour h si la fonction f s'annulait au moins une fois ? que pouvez-vous en déduire sur f ?
3) supposons qu'il existe une deuxième fonction g vérifiant les conditions de l'introduction, c'est-à-dire telle que $g' = g$ et $g'(0) = 1$.
   a. g peut-elle s'annuler ?
   b. Etudier les variations de la fonction $\frac{f}{g}$. préciser votre conclusion en vous servant de l'image de 0 par cette fonction.

Conclusion : il n'y a qu'une seule fonction égale à sa dérivée et associant à 0 l'image 1, on l'appellera l'exponentielle est on la notera : $\exp(x)$

Partie II

Montrer par l'absurde que l'exponentielle ne peut avoir de valeur négative (on utilisera le théorème des valeurs intermédiaire et la réponse du 2) partie I

Partie III

Soit y un réel , et $m(x) = \exp(x + y)\exp(-x)$

1) Prouver que m est une fonction constante, et que cette constante vaut $\exp(y)$
2) En utilisant l'égalité obtenue avec $y = 0$, exprimer $exp(-x)$ en fonction de $exp(x)$
3) Utiliser les résultats des questions 1 et 2 pour prouver que $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$

Partie IV

Prouver par récurrence que pour tout réel x et pour tout entier n on a $(\exp(x))^n = \exp(nx)$

Partie V

1) Faire un tableau de variation de la fonction exponentielle (à compléter à la fin de cette partie)
2) Prouver que $\exp(1) > 1$
3) Utiliser la partie IV et la question précédente pour déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(n)$
4) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x)$ en utilisant la définition de la limite que vous cherchez à obtenir
5) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x)$ en utilisant la question 2 partie III

TD : découverte de la fonction exponentielle

Prérequis : $(\boldsymbol{fog})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) \times (\boldsymbol{f}'\boldsymbol{og})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{f}'\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big)$

Partie I

On admet qu'il existe au moins une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et associant à 0 l'image 1, montrons l'unicité d'une telle fonction.

1) Soit f une de ces fonctions h la fonction définie par $h(x) = f(x)f(-x)$
   a. montrer qu'elle est constante
   b. quelle est la constante en question
2) que se passerait-il pour h si la fonction f s'annulait au moins une fois ? que pouvez-vous en déduire sur f ?
3) supposons qu'il existe une deuxième fonction g vérifiant les conditions de l'introduction, c'est-à-dire telle que $g' = g$ et $g'(0) = 1$.
   a. g peut-elle s'annuler ?
   b. Etudier les variations de la fonction $\frac{f}{g}$. préciser votre conclusion en vous servant de l'image de 0 par cette fonction.

Conclusion : il n'y a qu'une seule fonction égale à sa dérivée et associant à 0 l'image 1, on l'appellera l'exponentielle est on la notera : $\exp(x)$

Partie II

Montrer par l'absurde que l'exponentielle ne peut avoir de valeur négative (on utilisera le théorème des valeurs intermédiaire et la réponse du 2) partie I

Partie III

Soit y un réel , et $m(x) = \exp(x + y)\exp(-x)$

1) Prouver que m est une fonction constante, et que cette constante vaut $\exp(y)$
2) En utilisant l'égalité obtenue avec $y = 0$, exprimer $exp(-x)$ en fonction de $exp(x)$
3) Utiliser les résultats des questions 1 et 2 pour prouver que $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$

Partie IV

Prouver par récurrence que pour tout réel x et pour tout entier n on a $(\exp(x))^n = \exp(nx)$

Partie V

1) Faire un tableau de variation de la fonction exponentielle (à compléter à la fin de cette partie)
2) Prouver que $\exp(1) > 1$
3) Utiliser la partie IV et la question précédente pour déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(n)$
4) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x)$ en utilisant la définition de la limite que vous cherchez à obtenir
5) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x)$ en utilisant la question 2 partie III