Chap 10 – Calcul intégral

I. Intégrale d'une fonction sur un intervalle :

Notation $\int_a^b f(x)dx$ introduite vers 1820 par les français Fourier et Cauchy, qui prolonge le signe $\int$ utilisé par l'allemand Leibniz. Le symbole est une déformation du « S » de somme.

1. Définition

Définition 2 : $a, b \in \mathbb{R}$. Soit *f* une fonction **continue** et **positive** sur [*a* ; *b*]. On appelle **intégrale de *f* entre *a* et *b*** l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de *f*, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$. Cette intégrale se note $\int_a^b f(x)dx$ et se lit « intégrale de *a* à *b* de *f* » Le résultat se donne en unité d'aire (u.a).

Remarque : l'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ des axes.

Remarque : une intégrale a une valeur numérique, on dit que la variable est « muette » car elle ne figure pas dans le résultat. Elle peut être remplacée par une autre : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

Définition 3 : Si *f* est **négative** sur [*a ; b*], l'intégrale de *f* est l'opposé de cette aire, elle est donc négative. Si *f* change de signe sur [*a ; b*], on subdivise l'intervalle de façon à pouvoir appliquer les définitions ci-dessus.

Exercice 4 : $f(x) = x - 2$. Calculer $\int_1^4 f(x)dx$.

Définition 4 : Pour toute fonction *f* continue sur [*a ; b*], la **valeur moyenne de *f* sur [*a ; b*]** est le réel

$$m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)dx$$

Interprétation géométrique :…

Exercice 5 : Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x - 2$ sur $[1; 4]$.

2. Propriétés :

Propriété 2 : Si *f* est une constante k sur I, alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b kdx$= …………

Théorème 3 : (admis) Toute fonction **continue** sur $[a ; b]$ admet une intégrale sur cet intervalle.

Principe de démonstration : …

Propriété 4 : (*se démontrent facilement avec l'aire*) *f* et *g* sont deux fonctions continues sur I, et $a, b, c \in I$. a<b

- $\int_a^a f(x)dx =$
- Relation de Chasles :
- Permutation des bornes de l'intégrale :
- Linéarité : (1)

  (2)
- Positivité :
- Ordre :
- Inégalité de la moyenne :

Théorème 5: Soit f une fonction continue sur I, et $a \in I$. La fonction définie sur I par $F: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et sa dérivée est . F est donc l'unique primitive de f qui s'annule en a.
Conséquence : **Toute fonction continue admet une primitive sur I.**

Remarque : attention à la différence entre les variables x et t.

Démonstration : (dans le cas où f est croissante)

II. Méthodes de calcul d'une intégrale :

1. Avec une primitive de f :

Propriété 6 : $a, b \in I$. Si F est une primitive de f sur I, alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ qu'on écrit $[F(x)]_a^b$.

Démonstration :

Méthode d'utilisation : On veut calculer $\int_0^1 (e^x - x)dx$. Une primitive de $f(x) = e^x - x$ est $F(x) =$ …………………

Compléter : $\int_0^1 (e^x - x)dx =$ [………………]$_0^1$ = ……………………… = ……….

Exercice 6 : Calculer les intégrales $I_1 = \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}dx$ et $I_2 = \int_{-1}^1 e^{x+1}dx$.

2. L'intégration par parties :

Si aucune autre formule n'est applicable, et pour un produit de fonctions, penser alors à l'intégration par parties :

Propriété 7: Soient u et v deux fonctions dérivables sur I de dérivées continues sur I. Pour tous $a, b \in I$:

$$\int_a^b u'(x) \times v(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x)dx$$

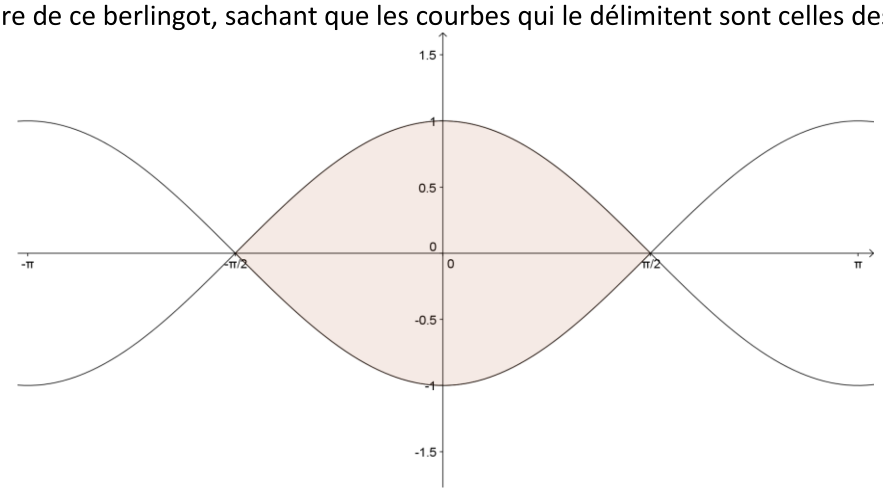
Démonstration :

Exemple 7 : Calculer $I = \int_0^1 xe^x dx$. Pour $x > 0$, calculer $\int_1^x \ln t \, dt$ pour trouver une primitive de la fonction ln.

III. Quelques applications du calcul intégral :

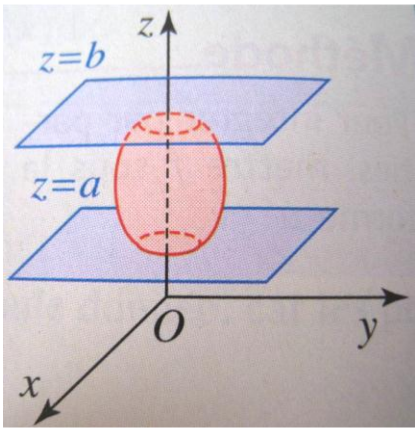
1. Calcul d'aires de surfaces planes :

Exemple 8: Calculer l'aire de ce berlingot, sachant que les courbes qui le délimitent sont celles des fonctions cos et –cos .



2. Calcul de volumes :

On considère un solide de l'espace compris entre les 2 plans d'équations $z = a$ et $z = b$ $(0 < a < b)$. Pour z compris entre a et b, on note $S(z)$ l'aire de la section du solide par un plan horizontal parallèle à (xOy).

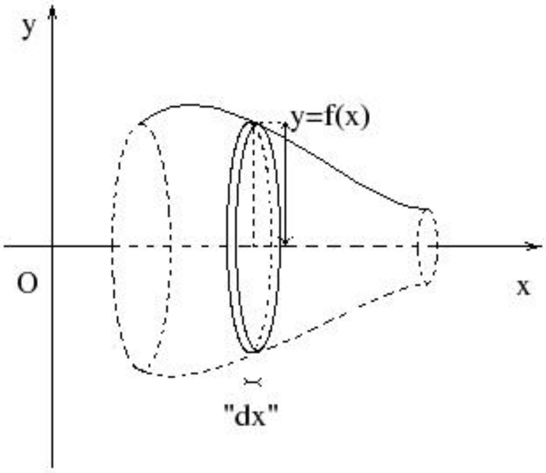


Propriété 8 : Le volume du solide est donné par $V = \int_a^b S(z)dz$.

Exemple 9: Retrouver grâce à une intégrale bien choisie la formule du volume d'une sphère de rayon R.

Cas particulier du solide de révolution : c'est un solide engendré par la rotation d'une courbe autour de l'axe $(x'x)$, cette courbe engendre une surface qui elle-même délimite un solide (très fréquent en industrie).

La section de ce solide par un plan perpendiculaire à l'axe de rotation est un cercle de rayon $f(x)$.

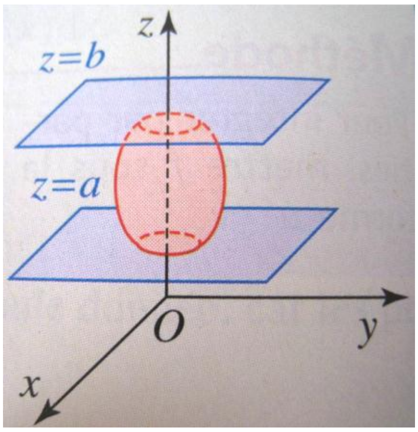


Le volume de ce solide est donc $V = \int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx$, puisque dans ce cas $S(x) = \pi\left(f(x)\right)^2$.

3. Distance parcourue en cinématique, connaissant la vitesse instantanée :

Si on connaît la vitesse instantanée $v(t)$ d'un point mobile en fonction de la durée t, alors la distance parcourue par ce mobile entre les dates t_0 et t_1 est $\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$.

Exemple 10 : la vitesse d'un mobile est $\frac{1}{t}$ en m.s^{-1}. Calculer la distance parcourue entre les temps t = 1 et t = 2s.

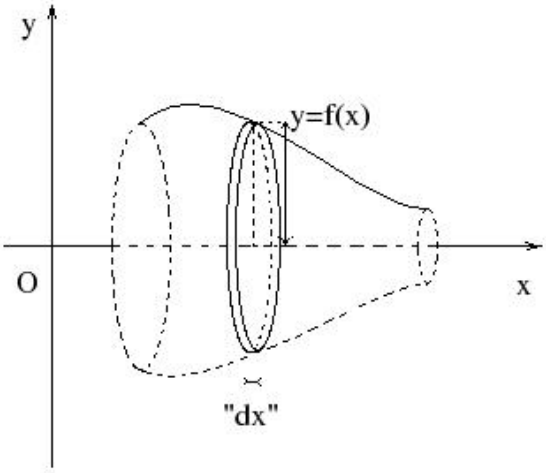


Propriété 8 : Le volume du solide est donné par $V = \int_a^b S(z)dz$.

Exemple 9: Retrouver grâce à une intégrale bien choisie la formule du volume d'une sphère de rayon R.

Cas particulier du solide de révolution : c'est un solide engendré par la rotation d'une courbe autour de l'axe $(x'x)$, cette courbe engendre une surface qui elle-même délimite un solide (très fréquent en industrie).

La section de ce solide par un plan perpendiculaire à l'axe de rotation est un cercle de rayon $f(x)$.



Le volume de ce solide est donc $V = \int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2 dx$, puisque dans ce cas $S(x) = \pi\big(f(x)\big)^2$.

1. Distance parcourue en cinématique, connaissant la vitesse instantanée :

Si on connaît la vitesse instantanée $v(t)$ d'un point mobile en fonction de la durée t, alors la distance parcourue par ce mobile entre les dates t_0 et t_1 est $\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$.

Exemple 10 : la vitesse d'un mobile est $\frac{1}{t}$ en m.s^{-1}. Calculer la distance parcourue entre les temps t = 1 et t = 2s.