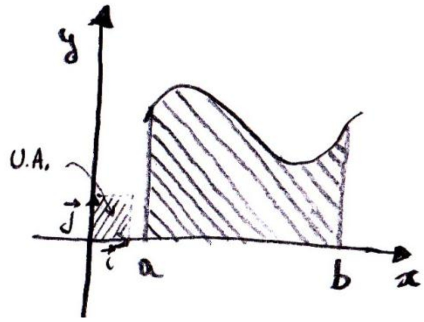
I. Intégrale d'une fonction sur un intervalle :

Notation $\int_a^b f(x)dx$ introduite vers 1820 par les français Fourier et Cauchy, qui prolonge le signe $\int$ utilisé par l'allemand Leibniz. Le symbole est une déformation du « S » de somme.

1. Définition

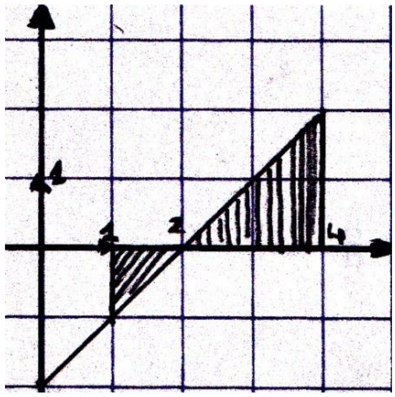


Définition 2 : $a, b \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction **continue** et **positive** sur [*a* ; *b*]. On appelle **intégrale de *f* entre *a* et *b*** l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de *f*, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$. Cette intégrale se note $\int_a^b f(x)dx$ et se lit « intégrale de *a* à *b* de *f* » Le résultat se donne en unité d'aire (u.a).

Remarque : l'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ des axes.

Remarque : une intégrale a une valeur numérique, on dit que la variable est « muette » car elle ne figure pas dans le résultat. Elle peut être remplacée par une autre : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

Définition 3 : Si *f* est **négative** sur [*a ; b*], l'intégrale de *f* est l'opposé de cette aire, elle est donc négative. Si *f* change de signe sur [*a ; b*], on subdivise l'intervalle de façon à pouvoir appliquer les définitions ci-dessus.



Exercice 4 : $f(x) = x - 2$. Calculer $\int_1^4 f(x)dx$.
Sur l'intervalle [1 ;4] la courbe est négative sur [1 ;2] puis positive sur [2 ;4]
Il faut donc compter négativement la première aire et positivement la seconde ainsi :
$\int_1^4 f(x)dx = -\frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{3}{2}$

Définition 4 :
Pour toute fonction *f* continue sur [*a ; b*], la **valeur moyenne de *f* sur [*a ; b*]** est le réel : $m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)dx$

Interprétation géométrique : c'est la hauteur du rectangle qui aurait la même aire que $\int_a^b f(x)dx$ et qui est délimité par les mêmes verticales.

Exercice 5 : Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x - 2$ sur $[1; 4]$.

$$m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{4-1} \times \int_1^4 f(x)dx = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

2. Propriétés :

Propriété 2 : Si *f* est une constante k sur I, alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b kdx$= k(b-a)

Théorème 3 : (admis) Toute fonction **continue** sur $[a ; b]$ admet une intégrale sur cet intervalle.

.

Propriété 4 : (*se démontrent facilement avec l'aire*) *f* et *g* sont deux fonctions continues sur I, et $a, b, c \in I$. a<b

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
- Permutation des bornes de l'intégrale : $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- Linéarité : (1) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

  (2) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

• Positivité : Si f est une fonction positive sur $[a\,;b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

• Ordre : Si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a\,;b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ (se démontre en utilisant la positivité de $f-g$) et avec la première propriété de linéarité)

•Inégalité de la moyenne : Si $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a\,;b]$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Théorème 5: Soit f une fonction continue sur I, et $a \in I$. La fonction définie sur I par $F: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et sa dérivée est$f$. F est donc l'unique primitive de f qui s'annule en a.
Conséquence : **Toute fonction continue admet une primitive sur I.**

Remarque : attention à la différence entre les variables x et t.

Démonstration :

Soit f une fonction continue et croissante sur un intervalle I. Soit a un réel de I.
Et S la fonction définie sur Ipar $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$
Le but de la démonstration sera de prouver que la dérivée de S existe est qu'elle vaut f
$\frac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h} = \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{h} = \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)dt + \int_{x_0}^{a} f(t)dt}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h}$
Encadrons $\frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h}$

Cas 1 : $h > 0$
Soit $t \in [x_0; x_0+h]$ on a donc $x_0 \leq t \leq x_0+h$
Or f est croissante sur I donc $f(x_0) \leq f(t) \leq f(x_0+h)$
Donc d'après l'inégalité de la moyenne :
$f(x_0)[(x_0+h)-x_0] \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \leq f(x_0+h)[(x_0+h)-x_0]$
Donc $f(x_0)h \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \leq f(x_0+h)h$
Donc $f(x_0) \leq \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h} \leq f(x_0+h)$ donc $f(x_0) \leq \frac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h} \leq f(x_0+h)$
Or $\lim_{h\to 0^+} f(x_0+h) = f(x_0)$ et $\lim_{h\to 0^+} f(x_0) = f(x_0)$
Donc par encadrement : $\lim_{h\to 0^+} \frac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h} = f(x_0)$

Cas 2 : $h < 0$
Soit $t \in [x_0+h; x_0]$ on a donc $x_0+h \leq t \leq x_0$
Or f est croissante sur I donc $f(x_0+h) \leq f(t) \leq f(x_0)$
Donc d'après l'inégalité de la moyenne :
$f(x_0+h)[x_0-(x_0+h)] \leq \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,dt \leq f(x_0)[x_0-(x_0+h)]$ ici $f(x_0+h)$ fait office de m et $f(x_0)$ de M
Donc $-hf(x_0+h) \leq \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,dt \leq -hf(x_0)$ on a effectué
Donc $hf(x_0+h) \geq -\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,dt \geq hf(x_0)$ on a multiplié par -1
Donc $hf(x_0+h) \geq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \geq hf(x_0)$ on a permuté les bornes de l'intégrale
Donc $f(x_0+h) \leq \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h} \leq f(x_0)$ on a divisé par h (attention il est négatif)
Or $\lim_{h\to 0^-} f(x_0+h) = f(x_0)$ et $\lim_{h\to 0^-} f(x_0) = f(x_0)$
Donc par encadrement : $\lim_{h\to 0^-} \frac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h} = f(x_0)$

Synthèse
On a donc $\lim_{h\to 0^+} \frac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h} = f(x_0)$ la fonction $S(x)$ est donc dérivable en x_0 et sa dérivée vaut $f(x_0)$ donc S est une primitive de f de plus $S(a) = 0$, c'est donc la primitive qui s'annule en a.

II. Méthodes de calcul d'une intégrale :

1. Avec une primitive de f :

Propriété 6 : $a, b \in I$. Si F est une primitive de f sur I, alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ qu'on écrit $[F(x)]_a^b$.

Démonstration :

Soit F une primitive de f alors $\int_a^x f(t)\, dt \; = F(x) + c$ de plus $\int_a^a f(t)\, dt \; = F(a) + c$ donc $F(a) + c = 0$

Donc $\int_a^x f(t)\, dt \; = F(x) - F(a)$

Donc si on pose x=a on aura : $\int_a^b f(t)\, dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

Méthode d'utilisation : On veut calculer $\int_0^1 (e^x - x)dx$. Une primitive de $f(x) = e^x - x$ est $F(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$

Compléter : $\int_0^1 (e^x - x)dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = e^1 - \frac{1^2}{2} - \left(e^0 - \frac{0^2}{2}\right) = e - \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{3}{2}$

Exercice 6 : Calculer les intégrales :

$I_1 = \int_1^2 \frac{x}{x^2+1} dx \; = \int_1^2 \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2}\ln(|x^2 + 1|)\right]_1^2 = \frac{1}{2} ln5 - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$

$I_2 = \int_{-1}^1 e^{x+1} dx = [e^{x+1}]_{-1}^1 = e^2 - e^0$

2. L'intégration par parties :

Si aucune autre formule n'est applicable, et pour un produit de fonctions, penser alors à l'intégration par parties :

Propriété 7: Soient u et v deux fonctions dérivables sur I de dérivées continues sur I. Pour tous $a, b \in \; I$:

$$\int_a^b u'(x) \times v(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x)dx$$

Démonstration :

$\left(u(x) \times v(x)\right)' = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$ donc $u'(x) \times v(x) = \left(u(x) \times v(x)\right)' - u(x) \times v'(x)$

Donc $\int_a^b u'(x) \times v(x)dx = \int_a^b \left(\left(u(x) \times v(x)\right)' - u(x) \times v'(x)\right) dx$

$= \int_a^b \left(u(x) \times v(x)\right)' dx - \int_a^b u(x) \times v'(x)dx$ par linéarité

$= [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x)dx$ car $u(x) \times v(x)$ est une primitive de $\left(u(x) \times v(x)\right)'$

Exemple 7 : Calculer $I = \int_0^1 xe^x dx$. Pour $x > 0$, calculer $\int_1^x \ln t\, dt$ pour trouver une primitive de la fonction ln.

$I = \int_0^1 xe^x dx$ je pose $v(x) = x$ et $u'(x) = e^x$ donc on aura : $v'(x) = 1$ et $u(x) = e^x$

$I = \int_0^1 xe^x dx = [e^x x]_0^1 - \int_0^1 e^x 1 dx = [e^x x]_0^1 - [e^x]_0^1 = e^1 1 - e^0 0 - (e^1 - e^0) = 1$

$J = \int_1^x \ln t\, dt$ je pose $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$ et donc $u(t) = t$ et $v'(x) = \frac{1}{t}$

$\int_1^x \ln t\, dt = [t \ln t]_1^x - \int_1^x t \frac{1}{t} dt = [t \ln t]_1^x - [t]_1^x = x \ln x - 1 \ln 1 - x + 1 = x \ln x - x + 1$ or cette fonction est la primitive de f s'annulant en 1.

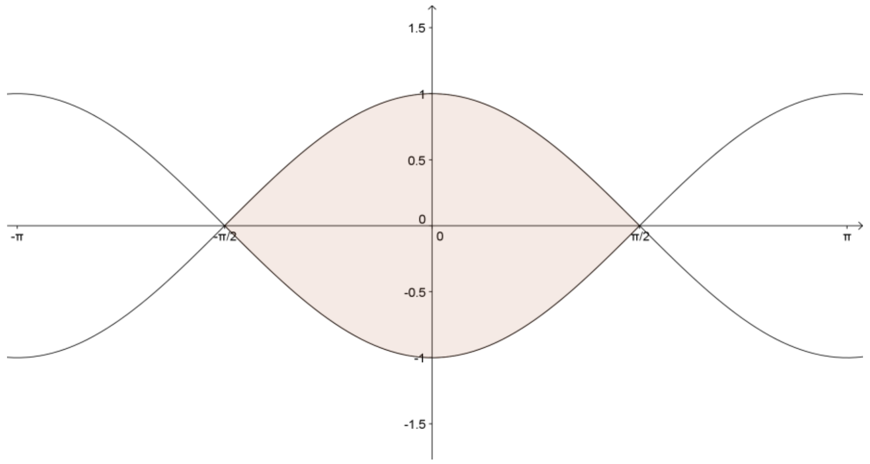
III. Quelques applications du calcul intégral :

1. Calcul d'aires de surfaces planes :

Exemple 8: Calculer l'aire de ce berlingot, sachant que les courbes qui le délimitent sont celles des fonctions cos et –cos .

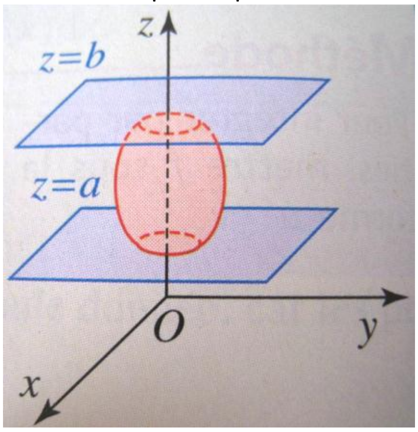
A=$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\, dt + \left(-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos(t)\, dt\right) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\, dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\, dt$

$= 2[\sin(t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 4u.a.$



2. Calcul de volumes :

On considère un solide de l'espace compris entre les 2 plans d'équations $z = a$ et $z = b$ $(0 < a < b)$. Pour z compris entre a et b, on note $S(z)$ l'aire de la section du solide par un plan horizontal parallèle à (xOy).



Propriété 8 : Le volume du solide est donné par $V = \int_a^b S(z)dz$.

Exemple 9: Retrouver grâce à une intégrale bien choisie la formule du volume d'une sphère de rayon R.

On va considérer la sphère de centre R centré en O le centre du repère.

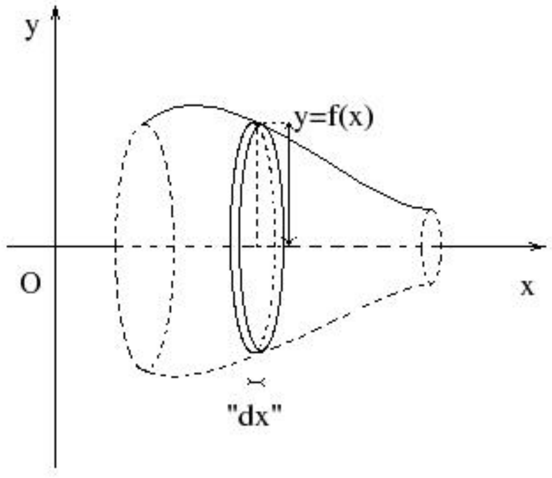
Quand la sphère est coupée par un plan situé à la hauteur z, la section ainsi obtenue est un disque de rayon r avec d'après pythagore $r^2 = R^2 - z^2$, l'aire de se disque est $\pi r^2 = \pi(R^2 - z^2)$

D'après la propriété 8 je vais avoir $\int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)dz = \left[\pi\left(R^2 z - \frac{z^3}{3}\right)\right]_{-R}^{R} = \pi\left(R^2 R - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(R^2(-R - \frac{(-R)^3}{3}\right)$

$= \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \pi\left(2\frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$

Cas particulier du solide de révolution : c'est un solide engendré par la rotation d'une courbe autour de l'axe $(x'x)$, cette courbe engendre une surface qui elle-même délimite un solide (très fréquent en industrie).

La section de ce solide par un plan perpendiculaire à l'axe de rotation est un cercle de rayon $f(x)$.



Le volume de ce solide est donc $V = \int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2 dx$, puisque dans ce cas $S(x) = \pi\big(f(x)\big)^2$.

3. Distance parcourue en cinématique, connaissant la vitesse instantanée :

Si on connaît la vitesse instantanée $v(t)$ d'un point mobile en fonction de la durée t, alors la distance parcourue par ce mobile entre les dates t_0 et t_1 est $\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$.

Exemple 10 : la vitesse d'un mobile est $\frac{1}{t}$ en m.s^{-1}. Calculer la distance parcourue entre les temps t = 1 et t = 2s.

$\frac{1}{2-1}\int_1^2 \frac{1}{t}dt = 1[\ln|t|]_1^2 = ln2 - ln1 = \ln(2)$ donc $v_m = \ln(2)\, m.s^{-1}$