Exercice 124 P 206

$I = \int_1^e x^2 \ln(x)\, dx$ On pose $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = x^2$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^3}{3}$

Donc $I = \left[\frac{\ln(x)x^3}{3}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\, dx = \frac{\ln(e)e^3}{3} - \frac{\ln(1)1^3}{3} - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{\ln(1)1^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1^3}{9}\right) = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}$

$J = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx$ On pose $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{-1}{x}$

Donc $J = \left[\frac{\ln(x)(-1)}{x}\right]_1^e - \int_1^e \frac{-1}{x}\frac{1}{x}\, dx = \frac{\ln(e)(-1)}{e} - \frac{\ln(1)(-1)}{1} + \int_1^e \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{e} - 0 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$

$= -\frac{1}{e} - 0 + \left(-\frac{1}{e} + \frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$

Exercice 125 P 206

$I = \int_{\frac{1}{e}}^1 1\ln(x)\, dx$ On pose $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$

Donc $I = [x\ln(x)]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 x\frac{1}{x}\, dx = 1\ln(1) - \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) - [x]_{\frac{1}{e}}^1 = +\frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e} - 1$

$J = \int_{\frac{1}{e}}^1 1\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$ On pose $u(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ et $v'(x) = 1$ donc $u'(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{x(x+1)}$ et $v(x) = x$

Donc $J = \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{x(x+1)}\, dx = \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)e - \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right)1 - \int_1^e \frac{1}{(x+1)}\, dx$

$= \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)e - \ln(2)\,1 - [\ln(1+x)]_1^e = \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)e - \ln(2)\,1 - (\ln(1+e) - \ln(1+1))$

$= \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)e - \ln(1+e)$

Exercice 137 P 210

1a) $\sqrt{x^2+2}$ a pour dérivée : $\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$ donc $f'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}} = \frac{\sqrt{x^2+2}+x}{(x+\sqrt{x^2+2})\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1 + \sqrt{1^2+2}\right) - \ln\left(0 + \sqrt{0^2+2}\right) = \ln\left(\frac{(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\right)$

$J + 2I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx + 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} + 2\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right) dx = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}} dx = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\, dx = K$

b) la Ti-92 me donne : $\int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}} dx = \left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 = \sqrt{3}$

c) $K + J = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}} dx + \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}} dx = \sqrt{3}$

d) $J + 2I = K \Leftrightarrow K - J = 2I \Leftrightarrow K - J = 2\ln\left(\frac{(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\right)$ $K + J = \sqrt{3}$

donc $2K = 2\ln\left(\frac{(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{3}$ donc $K = \ln\left(\frac{(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$

de plus $2J = \sqrt{3} - 2\ln\left(\frac{(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\right)$ donc $J = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\left(\frac{(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\right)$

Exercice 149P214

$$I = \int_0^1 \frac{x^2\, e^x}{1+x} dx$$

1) $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$ donc $f'(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$ or $f'(x) \geq 0$ sur [0 ;1] donc f est croissante sur cet intervalle.

2)a) Soit k entier compris entre 0 et 4 , f étant croissante sur [0 ;1] donc elle le sera aussi sur $\left[\frac{k}{5};\frac{k+1}{5}\right]$

$f\left(\frac{k}{5}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k+1}{5}\right)$ donc d'après le théorème d'inégalité de la moyenne on aura :

$\left(\frac{k+1}{5} - \frac{k}{5}\right)\ f\left(\frac{k}{5}\right) \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x} dx\ \leq \left(\frac{k+1}{5} - \frac{k}{5}\right)\ f\left(\frac{k+1}{5}\right)$

Donc $\frac{1}{5}\ f\left(\frac{k}{5}\right) \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x} dx\ \leq \frac{1}{5}\ f\left(\frac{k+1}{5}\right)$

2b)

On a montré que $\frac{1}{5}\ f\left(\frac{k}{5}\right) \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x}dx\ \leq \frac{1}{5}\ f\left(\frac{k+1}{5}\right)$ quand k était un entier compris entre 1 et 4, donc

$\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{5}\ f\left(\frac{k}{5}\right) \leq \sum_{k=0}^{4} \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x}dx\ \leq \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{5}\ f\left(\frac{k+1}{5}\right)$

Donc $\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}\ f\left(\frac{k}{5}\right) \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx\ \leq \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}\ f\left(\frac{k+1}{5}\right)$

Donc $\frac{1}{5}S_4 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx\ \leq \frac{1}{5}\left(S_5 - f\left(\frac{0}{5}\right)\right)$ donc $\frac{1}{5}S_4 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx\ \leq \frac{1}{5}(S_5 - 1)$ CQFD

c) $S_4 \approx 5{,}458660579 \approx 5{,}4587$ et $S_5 \approx 6{,}817801493 \approx 6{,}8178$

donc $\frac{1}{5}S_4 \approx 1{,}09173 \approx 1{,}091$ et $\frac{1}{5}(S_5 - 1) \approx 1{,}16356 \approx 1{,}164$

ici on a arrondi par défaut la première expression et par excès la suivante donc :

$$1{,}091 \leq \frac{1}{5}S_4 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx\ \leq \frac{1}{5}(S_5 - 1) \leq 1{,}164$$

3a) $1 - x + \frac{x^2}{1+x} = \frac{(1-x)(1+x)+x^2}{1+x} = \frac{1-x^2+x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x}$

b) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx\ = \int_0^1 \left(1 - x + \frac{x^2}{1+x}\right)e^x\ dx\ = \int_0^1 \left((1-x)e^x + \frac{x^2}{1+x}e^x\right)\ dx$

$= \int_0^1 (1-x)e^x\ dx\ + \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}e^x\ dx\ = \int_0^1 (1-x)e^x\ dx\ + I$

c) $\int_0^1 (1-x)e^x\ dx\ = [(1-x)e^x]_0^1 - \int_0^1 -e^x\ dx\ = 0e^1 - 1e^0 - [-e^x]_0^1$

$= -1 - (-e^1 + e^0) = e^1 - 2$

on a utilisé une intégration par partie en utilisant $u(x) = (1-x)$, $v'(x) = e^x$ et $u'(x) = -1$, $v(x) = e^x$

d) nous avons donc $\int_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx\ = e^1 - 2 + I$ donc $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx\ - e^1 + 2$ donc :

$$1{,}091 + 2 - e^1 \leq I \leq 1{,}164 + 2 - e^1$$

Donc

$$0{,}3727 \leq I \leq 0{,}4457$$

C'est compatible avec ce que donne la calculatrice avec la fontion : fonctIntégr(du menu MATH de la touche math)
quand on tape : fonctIntégr(x^2*e^x/(1+x),x,0,1) elle donne 0,4071

Exercice 98P360

Partie A

On définit F sur $[0;+\infty[$ par $F(t) = P(X \leq t) = \int_0^t f(t)dt$

1) On a : $P_{X\geq t}(t \leq X \leq t+h) = P(X \leq h) \Leftrightarrow P_{X\geq t}(X \leq t+h) = P(X \leq h)$

le membre de droite s'interprète par La probabilité que la durée de vie d'un noyau soit inférieure ou égale à t+h sachant qu'elle est supérieure à t est égale à celle que la durée de vie d'un noyau radioactif soit inférieure ou égale à h.

Reformulation : la probabilité à un moment t qu'un noyau tienne encore une durée inférieur à h est égale à la probabilité que la durée de vie d'un noyau soit inférieure à h.

Re-Reformulation : si à l'instant t , le noyau ne s'est pas désintégré la probabilité « qu'il tiennent encore sur une durée inférieure ou égale à h » ne dépend pas de la valeur de t.

2) $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X) - P(X > b) = P(X > a) - P(X > b) = \left(1 - P(X \leq a)\right) - \left(1 - P(X \leq b)\right)$
$= 1 - F(a) - 1 + F(b) = F(b) - F(a)$

$P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$

3) $P_{X\geq t}(t \leq X \leq t+h) = \frac{P\left((X\geq t)\cap(t\leq X\leq t+h)\right)}{P(X\geq t)} = \frac{P(t\leq X\leq t+h)}{P(X\geq t)} = \frac{F(t+h)-F(t)}{1-F(t)}$

$P(X \leq h) = F(h)$ or $P_{X\geq t}(X \leq t+h) = P(X \leq h)$ donc $\frac{F(t+h)-F(t)}{1-F(t)} = P(X \leq h)$

donc $F(t+h) - F(t) = P(X \leq h)\left(1 - F(t)\right)$

4) G est définie sur $[0;+\infty[$ par $G(t) = 1 - F(t)$ or $F(t)$ est la primitive de f s'annulant en 0, donc cette fonction est dérivable sur $[0;+\infty[$ et admet comme dérivée f sur cet intervalle donc $G'(t) = -f(t)$

5) $G(t+h) = 1 - F(t+h) = 1 - (F(t) + P(X \leq h)\left(1 - F(t)\right)$ d'après 3)
$= 1 - F(t) - P(x \leq h)\left(1 - F(t)\right) = \left(1 - F(t)\right)\left(1 - P(x \leq h)\right) = G(t)G(h)$

6) alors là c'est violent comme question, je ne vois pas comment y répondre rapidement.

Voici tout de même une piste $G(t+h) = G(t)G(h)$ implique qu'il existe un nombre positif c tel que $G(t) = a^t$ (autant la réciproque est évident autant l'implication que j'ai proposé prend du temps pour être démontrée) soit le réel λ vérifiant $\lambda = -\ln(a)$ alors tel que $a = e^{-\lambda}$ et donc $G(t) = a^t = \left(e^{-\lambda}\right)^t = e^{-\lambda t}$

Or $G(t) = 1 - F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

7) on sait que $F'(t) = f(t)$ or $F'(t) = 0 - \left(-\lambda e^{-\lambda t}\right) = \lambda e^{-\lambda t}$

Donc X a une fonction densité correspondant à une loi exponentielle de paramètre λ

Partie B

1) $P(X \geq 1000) = e^{-1000\lambda} = e^{-0,121} \approx 0,886$ autrement dit la probabilité que la durée de vie d'un noyau soit inférieure ou égale à 1000 ans est de 88,6%

2) $P(X \geq t) = P(X \leq t) \Leftrightarrow e^{-t\lambda} = 1 - e^{-t\lambda} \Leftrightarrow 2e^{-t\lambda} = 1 \Leftrightarrow e^{-t\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -t\lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,5)}{-\lambda}$

donc $t \approx 5728,5$ années