Devoir surveillé n°4

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(1+x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthononnal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On note D la droite d'équation $y = x$.

Partie A

1. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f.
   b. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
   a. Déterminer $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.
   c. Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser le tableau de variations de la fonction g.
   d. Montrer que sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, avec α négative et β appartenant à l'intervalle $[2\,;3]$.
   e. À l'aide des questions précédentes, détenniner le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.
2. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
On considère les points A d'affixe i, B d'affixe $-2\mathrm{i}$ et D d'affixe 1.

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.
Soit f l'application qui à tout point M d'affixe $z (z \neq \mathrm{i})$ associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{2z - \mathrm{i}}{\mathrm{i}z + 1}.$$

1. Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i})$.
2. Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D′ associé au point D par l'application f.
3. **a.** Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, $\left(z' + 2\mathrm{i}\right)(z - \mathrm{i}) = 1$.
   b. En déduire que pour tout point M d'affixe $z (z \neq \mathrm{i})$:

   $\mathrm{BM}' \times \mathrm{AM} = 1$
   et $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{BM}'}\right) = -\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.
4. **a.** Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
   b. En utilisant les résultats de la question 3. b., placer le point E′ associé au point E par l'application f. On laissera apparents les traits de construction.
5. Quelle est la nature du triangle BD′ E′ ?

Devoir surveillé n°4

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(1+x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthononnal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On note D la droite d'équation $y = x$.

Partie A

1. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f.
   b. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
   a. Déterminer $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.
   c. Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser le tableau de variations de la fonction g.
   d. Montrer que sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, avec α négative et β appartenant à l'intervalle $[2\,;3]$.
   e. À l'aide des questions précédentes, détenniner le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.
2. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
On considère les points A d'affixe i, B d'affixe $-2\mathrm{i}$ et D d'affixe 1.

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.
Soit f l'application qui à tout point M d'affixe $z (z \neq \mathrm{i})$ associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{2z - \mathrm{i}}{\mathrm{i}z + 1}.$$

1. Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i})$.
2. Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D′ associé au point D par l'application f.
3. **a.** Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, $\left(z' + 2\mathrm{i}\right)(z - \mathrm{i}) = 1$.
   b. En déduire que pour tout point M d'affixe $z (z \neq \mathrm{i})$:

   $\mathrm{BM}' \times \mathrm{AM} = 1$
   et $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{BM}'}\right) = -\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.
4. **a.** Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
   b. En utilisant les résultats de la question 3. b., placer le point E′ associé au point E par l'application f. On laissera apparents les traits de construction.
5. Quelle est la nature du triangle BD′ E′ ?

1=réunion 22 juin 2010

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(1+x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthononnal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
On note D la droite d'équation $y = x$.

Partie A

1. (a) Sens de variation de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} > 0 \text{ sur }]-1\,;\,+\infty[$$

La fonction f est donc croissante sur $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

(b) Limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition :

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x\to -1^+} 1+x = 0^+ \text{ et } \lim_{x\to -1^+} \ln(1+x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to +\infty} 1+x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$$

Tableau de variations de f :

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

(a) $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = -\infty$:

$$\lim_{x\to -1} g(x) = \lim_{x\to -1} 1 - x + \ln(1+x) = -\infty \text{ car } \lim_{x\to -1^+} 1+x = 0^+,\ \lim_{x\to -1^+} \ln(1+x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to -1} 1-x = 2$$

(b)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \text{ car } \lim_{x\to +\infty} 1+x = +\infty \text{ et } \lim_{X\to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} = \lim_{x\to +\infty} (1+x)\left(\frac{1-x}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x}\right) = -\infty \text{ car } \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to +\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$$

(c) Sens de variation de la fonction g

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \text{ du signe de } -x \text{ sur }]-1\,;\,+\infty[$$

La fonction g est donc strictement croissante sur $]-1;0[$ et strictement décroissante sur $]0;\,+\infty[$.
Elle possède une tange,nte horizonate au point d'abscisse 0.
Tableau de variations de la fonction g :

x	-1		α		0		β		$+\infty$
$f'(x)$		+			0			−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$

(d) Sur l'intervalle $]-1\,;\,0[$, la fonction g est continue, comme somme et composée de fonctions continues, et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $]-1\,;\,0[$ sur $]-\infty\,;\,1[$. Or 0 appartient à l'ensemble d'arrivée $]-\infty\,;\,1[$. Donc, 0 possède un unique antécédent, noté α dans $]-1\,;\,0[$.
Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction g est continue, comme somme et composée de fonctions continues, et strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection de $]0\,;\,+\infty[$ sur $]-\infty\,;\,1[$. Or 0 appartient à l'ensemble d'arrivée $]-\infty\,;\,1[$. Donc, 0 possède un unique antécédent, noté β dans $]0\,;\,+\infty[$.
De plus :

$$\begin{cases} g(2) \simeq 0{,}0986 > 0 \\ g(3) \simeq -0{,}614 < 0 \end{cases} \Longrightarrow 2 \leqslant \beta \leqslant 3$$

(e) Signe de $g(x)$:

- $-1 < x \leqslant \alpha \Longrightarrow g(x) \leqslant g(\alpha) = 0$. (La fonction g est croissante sur $[-1;\alpha[$).
- $\alpha \leqslant x \leqslant 0 \Longrightarrow g(\alpha) = 0 \leqslant g(x)$. (La fonction g est croissante sur $[\alpha;0]$).
- $0 \leqslant x \leqslant \beta \Longrightarrow g(x) \geqslant 0 = g(\beta)$. (La fonction g est décroissante sur $[0;\beta[$).
- $x \geqslant \beta \Longrightarrow g(x) \leqslant 0 = g(\beta)$. (La fonction g est décroissante sur $[\beta;+\infty[$).

x	-1		α		β		$+\infty$
Signe de $g(x)$		−	0	+	0	−	
Position relative de $\mathscr{C}_f$ et de D		$\mathscr{C}_f < (D)$	A	$\mathscr{C}_f > (D)$	B	$\mathscr{C}_f < (D)$	

Position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D :

- $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de la droite D pour $x \in]\alpha;\beta[$.
- $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de la droite D pour $x \in]-1;\alpha[\cup]\beta;+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

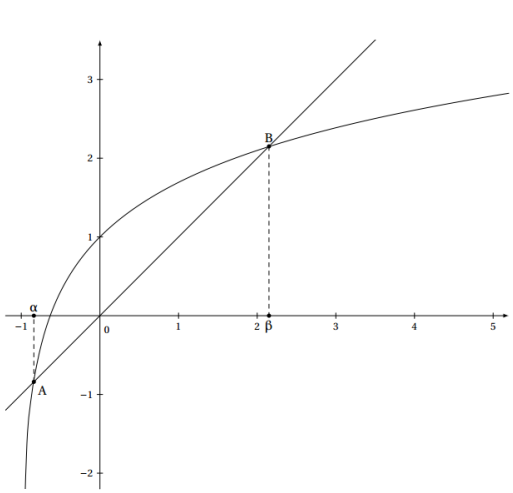
1. Pour tout nombre entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$. Démonstration par récurrence :
   - On a $2 \leqslant u_0 = 2 \leqslant \beta$
   - Supposons que, pour un n donné, on ait : $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$, alors, la fonction f étant croissante sur $[2;\beta]$:

$$2 \leqslant u_n \leqslant \beta \Longrightarrow \boxed{2} \leqslant 2{,}09861228867 \simeq f(2) \leqslant f(u_n) = \boxed{u_{n+1}} \leqslant f(\beta) = \boxed{\beta}$$

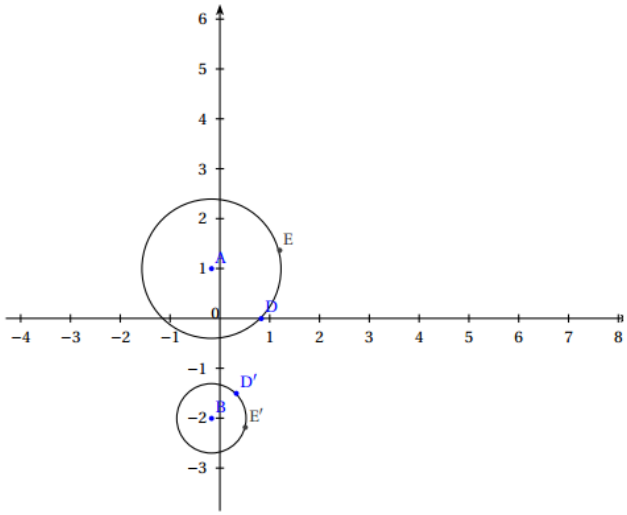
   - Ainsi, $\forall n,\ n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.
2. La suite (u_n) est croissante (*en utilisant le signe de $g(x)$ étudié plus haut*) :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geqslant 0 \text{ sur } [2;\beta]$$

Donc, (u_n) étant une suite croissante et majorée par β, elle est convergente.



2 Amérique du nord 3 juin 2010



1. Le point E est obtenu par rotation autour de A, d'angle $\frac{\pi}{3}$ du point D donc

$z_E - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_A)$ donc $z_E = e^{i\frac{\pi}{3}}(1-i) + i = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (1-i) + i =$

$\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$.

2. $z_{D'} = \frac{2-i}{i+1} = \frac{(2-i)(1-i)}{1^2+1^2} = \frac{1-3i}{2} = 0{,}5 - 1{,}5i$.

3. **a.** Pour tout nombre complexe z différent de i,

$(z'+2i)(z-i) = \left(\frac{2z-i}{iz+1} + 2i\right)(z-i) = \left(\frac{2z-i+2i(iz+1)}{iz+1}\right)(z-i) = \frac{i}{iz+1} \times (z-i) =$

$\frac{i}{i(z-i)} \times (z-i) = 1$.

b. Donc pour tout nombre complexe z différent de i, $(z'+2i)(z-i) = 1$ en prenant les modules et les arg :

Comme $(z'+2i) = z_{\overrightarrow{BM'}}$; $(z-i) = z_{\overrightarrow{AM}}$, et comme $\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{BM'}\right) = \arg(z'+2i)$

Ainsi que $\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{AM}\right) = \arg(z-i)$.

Pour tout point M d'affixe $z (z \neq i)$:

$BM' \times AM = 1$

et $\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{BM'}\right) + \left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{AM}\right) = k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

4. **a.** Les points D et E appartiennent à un même cercle (C) de centre A et de rayon par la rotation du 1) et le rayon est $AD = \sqrt{2}$.

b. Donc $AE = \sqrt{2}$,$AD = \sqrt{2}$ donc en utilisant la relation sur les longueurs : $AD \times BD' = 1$, $AE \times BE' = 1$ donc $BE' = BD' = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Et avec les angles :

$\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{BE'}\right) + \left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{AE}\right) = k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

et $\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{BD'}\right) + \left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{AD}\right) = k' \times 2\pi$ où k' est un entier relatif., on retranche ces deux relations

$\left(\overrightarrow{BD'}\,,\,\overrightarrow{BE'}\right) + \left(\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right) = k'' \times 2\pi$ où k'' est un entier relatif.

$\left(\overrightarrow{BD'}\,,\,\overrightarrow{BE'}\right) + \frac{\pi}{3} = k'' \times 2\pi$ où k'' est un entier relatif.

Donc $\left(\overrightarrow{BD'}\,,\,\overrightarrow{BE'}\right) = -\frac{\pi}{3} + k'' \times 2\pi$ où k''est un entier relatif.

c. Ainsi le triangle $BD'E'$ est isocèle en B et avec un angle de $-\frac{\pi}{3}$, il est équilatéral indirect.

Corrigé exercice 2 (Bac amérique du nord 3 juin 2010)

1) le triangle ADE est équilatéral direct donc $\frac{AE}{AD} = 1$ et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{3}$, or $\frac{z_E - z_A}{z_D - z_A}$ est le complexe de module $\frac{AE}{AD}$ et d'argument $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ donc on a : $\frac{z_E - Z_A}{Z_D - Z_A} = 1e^{i\frac{\pi}{3}}$
donc $z_E - z_A = (z_D - z_A)e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $z_E = (z_D - z_A)e^{i\frac{\pi}{3}} + z_A = (1-i)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} + i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})(1+i)$

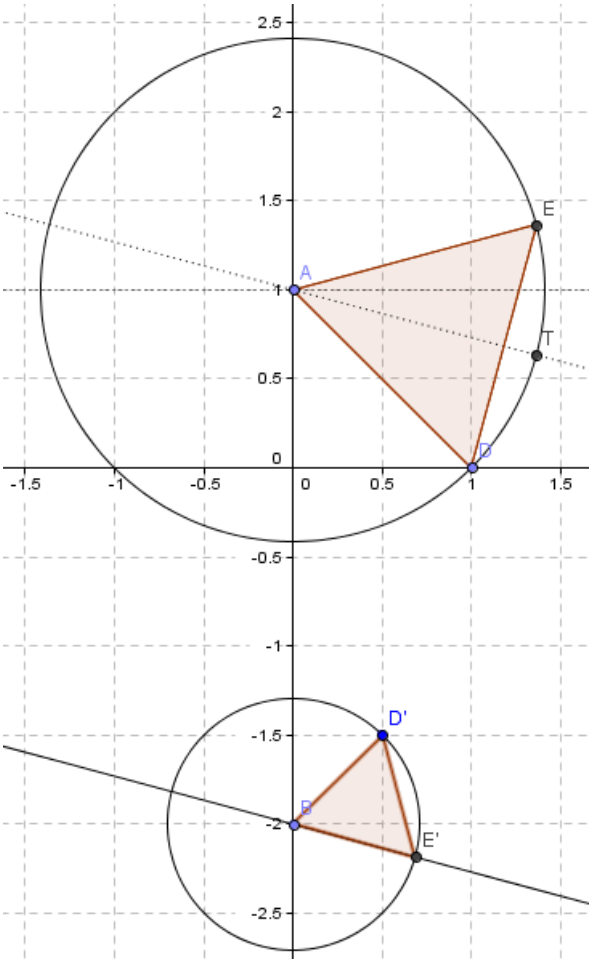
2) $z_{D'} = \frac{2z_D - i}{iz_D + 1} = \frac{2-i}{i+1} = \frac{(2-i)(1-i)}{(i+1)(1-i)} = \frac{2-2i-i-1}{1+1} = \frac{1}{2} + i\frac{3}{2}$

3)a) $(z' + 2i)(z - i) = \left(\frac{2z-i}{iz+1} + 2i\right)(z - i)$
$= \left(\frac{2z-i}{iz+1} + \frac{2i(iz+1)}{iz+1}\right)(z - i) = \left(\frac{2z-i-2z+2i}{iz+1}\right)(z - i)$
$= \left(\frac{i}{iz+1}\right)(z - i) = \left(\frac{iz+1}{iz+1}\right) = 1$
b) $(z' + 2i)(z - i) = 1$ donc $|(z' + 2i)(z - i)| = |1|$
donc $|(z' + 2i)|\,|(z - i)| = 1$ donc $|(z' - z_B)|\,|(z - z_A)| = 1$ donc $BM' \times AM = 1$
De plus on aura : $\arg(z' + 2i)(z - i) = \arg(1)$
Donc $\arg(z' - z_B) + \arg(z - z_A) = \arg(1)\ [2\pi]$
donc $(\vec{u}; \overrightarrow{BM'}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = 0\ [2\pi]$
Donc $(\vec{u}; \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{AM})\ [2\pi]$

4) a) $AD = |z_D - z_A| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
De plus AED est équilatéral donc AE=AD , donc les points E et D sont situés à la même distance $\sqrt{2}$ du point A donc ils sont sur le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$

b) exploitation des résultat précédents pour placer le point E' image de E par la transformation f.
On aura d'après 3b) : $BE' \times AE = 1$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{BE'}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{AE})\ [2\pi]$
Pour construire le point E' je trace T le symétrique de E par rapport à l'horizontale passant par A donc j'ai : $(\vec{u}; \overrightarrow{AT'}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{AE})\ [2\pi]$ puis j'ai tracé la parallèle à (AT) passant par B, ce qui me permet d'avoir le bon angle, il me reste tout de même à placer la bonne longueur $BE' \times AE = 1$ donc $BE' \times \sqrt{2} = 1$ donc $BE' = \frac{\sqrt{2}}{2}$ autrement dit la moitié d'une diagonale d'un carreau de côté une unité, ce qui correspond à BD' , j'ai donc tracé le cercle de centre B et de rayon BD et j'ai nommé E' le bon point d'intersection entre les la droite et le cercle.

c) le triangle semble équilatéral, le fait qu'il soit isocèle en B est immédiat mais pour la longueur du dernier côté je suis bloqué car je n'ai pas les coordonnées de E'.
Je vais donc passer par l'angle $(\overrightarrow{BE'}; \overrightarrow{BD'})$

$(\vec{u}; \overrightarrow{BD'}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{AD})\ [2\pi] = \frac{\pi}{4}$ ici la valeur de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{AD})$ est triviale (ça prend du temps de la calculer)
Or $(\vec{u}; \overrightarrow{BE'}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{AE})\ [2\pi]$ donc en retranchant membre à membre :
$(\vec{u}; \overrightarrow{BD'}) - (\vec{u}; \overrightarrow{BE'}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{AD}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AE})\ [2\pi]$
donc
$(\overrightarrow{BE'}; \overrightarrow{BD'}) = (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})\ [2\pi] = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Comme en plus le triangle BE'D' est isocèle en B je peux affirmer qu'il est équilatéral direct.