Exercice 1 **(Calcul de limites)**

Déterminer les limites suivantes puis en déduire l'existence ou non d'une asymptote horizontale ou verticale.

1. $\lim\limits_{x\to 0} x^3+5$
2. $\lim\limits_{x\to 2} (x-2)^2$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x + 3$
4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x+1)^2$
6. $\lim\limits_{x\to 3^-} -\dfrac{1}{x-3}$
7. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x - 1 + \cos x$
8. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} + x - 1$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} 3x + x^2 + \ln x$
10. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2+x+1$
11. $\lim\limits_{x\to -\infty} -\dfrac{2}{x^2+1}$
12. $\lim\limits_{x\to -\infty} x(x+1)$
13. $\lim\limits_{x\to -\infty} (e^x-1)^2$
14. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$
15. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{2-x}$
16. $\lim\limits_{x\to -\infty} (2x-3)^3$
17. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x - x^2$
18. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x+4$

Exercice 2 **(Forme indéterminée : cas d'une somme)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + x$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   (a) Mettre x^2 en facteur dans l'expression de $f(x)$.
   (b) En déduire la limite de f en $-\infty$.

Exercice 3 **(Forme indéterminée : cas d'un quotient)**

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$.

1. Déterminer la limite de f en 1.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (a) Mettre x^2 en facteur au numérateur et au dénominateur dans $f(x)$.
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 4 **(68 p 67 Maths STI2D Hachette - Détermination d'une fonction)**

Soit f une fonction définie et dérivables sur $]-2;+\infty[$ dont on donne ci-contre le tableau de variations. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $(0, I, J)$ d'unité graphique 1 cm.

x	-2	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	-5

On sait que :

- il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout x de $]-2;+\infty[$, $f(x) = a + \dfrac{b}{x+c}$;
- la courbe $\mathscr{C}$ passe par l'origine du repère.

1. (a) Utiliser le tableau de variation pour justifier l'existence d'une droite $\mathscr{D}$ asymptote verticale à $\mathscr{C}$. Donner une équation de $\mathscr{D}$.
   (b) En déduire la valeur de c
2. (a) Utiliser le tableau de variation pour justifier l'existence d'une droite $\mathscr{D}'$ asymptote horizontale à $\mathscr{C}$. Donner une équation de $\mathscr{D}'$.
   (b) En déduire la valeur de a.
3. Déterminer enfin la valeur de b et donner une expression explicite de $f(x)$.

Exercice 5 **(74 p 69 Maths STI2D Hachette - Un exemple d'asymptote oblique)**

Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x+1+\dfrac{1}{x^2}$. On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère (O, I, J) orthogonal d'unités 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont on précisera une équation.
2. (a) Déterminer la fonction dérivée de f et montrer que, pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$.
   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x de $]0;+\infty[$. Établir alors le tableau de variation de f en y faisant figurer les limites.
3. (a) Construire la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère (O, I, J). (Placer avec précision les points d'abscisses respectives 0,5 ; 1 ; 2 et 3.)
   (b) Sur le même graphique, construire la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x+1$. Que constate-t-on graphiquement sur la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ pour les « grandes » valeurs de x ?
4. Pour tout réel x de $]0;+\infty[$, on pose $g(x) = f(x) - (2x+1)$.
   (a) Déterminer une expression la plus simple possible de $g(x)$ pour tout réel x de $]0;+\infty[$.
   (b) Préciser le signe de $g(x)$ pour tout réel x de $]0;+\infty[$.
   (c) La courbe $\mathscr{C}$ est-elle située au-dessus ou en dessous de la droite $\mathscr{D}$? Justifier à l'aide du signe de $g(x)$.
   (d) Déterminer la limite de g en $+\infty$. Que peut-on en dé duire sur l'écart « vertical » entre la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ quand x devient de plus en plus grand ? (On dit que la droite $\mathscr{D}$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.)