Devoir surveillé : Complexes et trigonométrie

Exercice 1

Parie A 1) Calculer $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$ 2) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Partie B Soit deux complexes : $z_1=-5+5i$ et $z_2=7-i7\sqrt{3}$

1) Calculez (en écriture algébrique) z_1z_2 , en déduire $Re(z_1z_2)$ et $Im(z_1z_2)$
2) Déterminez les écritures exponentielles de z_1 et z_2
3) En déduire celle de z_1z_2
4) En déduire une autre écriture de $Re(z_1z_2)$ et $Im(z_1z_2)$
5) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
6) Comparez ces valeurs avec celles obtenues à la question 2 de la partie A, justifiez cette relation.

Exercice 2 QCM

1) Soit deux complexes : $z_1=2\sqrt{5}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z_2=4\sqrt{5}e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors $\frac{z_1}{z_2}$ vaudra :
   a. $\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ c. $40\,e^{i\frac{\pi}{6}}$
   b. $-\frac{i}{2}$ d. $\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$
2) Le nombre complexe $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$ est égal à : a. 1 c. $e^{i\frac{\pi}{2}}$
   b. $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ d. $e^{i\frac{\pi}{3}}$
3) Soit A le point d'affixe $z_A=-1+i$ et B le point d'affixe $z_B=3-2i$. Dans un repère complexe tracez ces deux points. Quelle est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$?
   a. $z_{\overrightarrow{AB}}=2-i$ c. $z_{\overrightarrow{AB}}=4-3i$
   b. $z_{\overrightarrow{AB}}=(4;-3)$ d. $z_{\overrightarrow{AB}}=5-6i$
4) Tracez le cercle de centre B et de rayon 1. Ses points sont les représentations graphiques de l'équation :
   a. $Re(z)=1$ c. $\arg\big(z-(3-2i)\big)=1$
   b. $|z-3+2i|=1$ d. $|z-(3+2i)|=1$
5) Tracez la demi droite issue de A et passant par le point d'affixe $0+2i$. Ses points sont les représentations graphiques de l'équation :
   a. $|z+1-i|=2$ c. $\arg(z-1+i)=\frac{\pi}{4}+k\pi$
   b. $\arg(z+1-i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ d. $Re\big(z-(-1+i)\big)=\frac{\pi}{4}$

Exercice 3

1) Donner l'équation complexe dont la représentation graphique est un cercle de rayon 3 et de centre le point A d'affixe $z_A=2+3i$
2) Donner l'équation complexe dont la représentation graphique est une droite horizontale de hauteur -3

Exercice 4

La tension aux bornes d'un générateur est donnée par la fonction $u(t)=12\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$

1) Déterminer une primitive U de la fonction u
2) En déduire $\int_0^{\frac{2\pi}{3}}u(t)dt$
3) En déduire la valeur moyenne de u sur $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$. Ce résultat était-il prévisible ? Si oui, pourquoi ?
4) Prouver que $u^2(t)=72\left(1-\cos\left(6t+\frac{\pi}{2}\right)\right)$
5) La tension efficace u_{eff} est le réel positif tels que $u_{eff}^2=\frac{3}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}u^2(t)dt$. Calculez u_{eff}.

Exercice 5

Soit (E_1) : $y'+5y=7$ et (E_2) $y''+4y=0$ deux équations différentielles

1) Donner les solutions de (E_1)
2) Donner f la solution de (E_1) qui vérifie $f(0)=3$
3) Donner les solutions de (E_2)
4) Donner g la solution de (E_1) qui vérifie $g(0)=\sqrt{3}$ et $g'(0)=-2$

Correction Devoir surveillé : Complexes et trigonométrie

Exercice 1 Parie A 1) $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$

2) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}$

Partie B

Soit deux complexes : $z_1=-5+5i$ et $z_2=7-i7\sqrt{3}$

1) $z_1z_2=-35+i35\sqrt{3}+35i+35\sqrt{3}$, en déduire $Re(z_1z_2)=35(-1+\sqrt{3})$ et $Im(z_1z_2)=35\left(1+\sqrt{3}\right)$
2) $z_1=5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2=14e^{-i\frac{\pi}{3}}$
3) $z_1z_2=5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}14e^{-i\frac{\pi}{3}}=70\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)}=70\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$
4) $Re(z_1z_2)=70\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $Im(z_1z_2)=70\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
5) On a donc $70\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=35\left(-1+\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{35\left(-1+\sqrt{3}\right)}{70\sqrt{2}}$

Donc $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{35\times\sqrt{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)}{35\times2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$70\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=35\left(1+\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{35\left(1+\sqrt{3}\right)}{70\sqrt{2}}$ donc $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{35\times\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{35\times2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

6) On remarque que $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ c'était prévisible vu que $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$

Exercice 2 QCM

1) avec : $z_1=2\sqrt{5}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z_2=4\sqrt{5}e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2\sqrt{5}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{4\sqrt{5}e^{i\frac{\pi}{3}}}=\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}-i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ **a.**
2) Le nombre complexe $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ***d***.
3) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $z_{\overrightarrow{AB}}=4-3i$ **c.**
4) Tracez le cercle de centre B et de rayon 1 représentations les solutions de ***b***. $|z-3+2i|=1$
5) La demi droite issue de A et passant par le point d'affixe $0+2i$. représente:b. $\arg(z+1-i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

Exercice 3

1) L'équation complexe dont la représentation graphique est un cercle de rayon 3 et de centre le point A d'affixe $z_A=2+3i$ sera $|z-(2+3i)|=3$
2) L'équation complexe dont la représentation graphique est une droite horizontale de hauteur -3 : $Im(z)=3$

Exercice 4 La tension aux bornes d'un générateur est donnée par la fonction $u(t)=12\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$

1) Une primitive U de la fonction u sera $U(t)=-\frac{12}{3}\cos\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)=-4\cos\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$
2) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}}u(t)dt=\left[-4\cos\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}=-4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\left(-4\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)=-4\frac{\sqrt{2}}{2}+4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$
3) La valeur moyenne de u sur $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$sera $\frac{1}{\frac{2\pi}{3}}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}u(t)dt=\frac{1}{\frac{2\pi}{3}}0=0$. Ce résultat était prévisible, car on a intégré une fonction sinus sur sa période donc les aires au-dessus et en dessous de de l'axe des abscisses se sont compensées
4) $u^2(t)=\left(12\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2=144\sin^2\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)=144\frac{\left(1-\cos\left(2\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)}{2}=72\left(1-\cos\left(6t+\frac{\pi}{2}\right)\right)$
5) $u_{eff}^2=\frac{3}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}u^2(t)dt=\frac{3}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}72\left(1-\cos\left(6t+\frac{\pi}{2}\right)\right)dt=\frac{3}{2\pi}72\left[t-\frac{1}{6}\sin\left(6t+\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}=\frac{108}{\pi}\left[\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)-\left(0-\frac{1}{6}\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]=\frac{108}{\pi}\left[\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{6}1\right)+\frac{1}{6}1\right]=\frac{108}{\pi}\times\frac{2\pi}{3}=72$ donc $.u_{eff}=\sqrt{72}$.

Exercice 5

1et 3 $(E_1):y'+5y=7$ et $(E_2)\ y''+4y=0$ ont pour solution générales $y=\frac{7}{5}+k\,e^{-5x}$ et $y=A\cos(2x)+B\sin(2x)$

2) $f(0)=3\Leftrightarrow\frac{7}{5}+k\,e^{-5\times0}=3\Leftrightarrow1{,}4+k=3\Leftrightarrow k=1{,}6$ $\quad f(x)=\frac{7}{5}+1{,}6\,e^{-5x}$

4) g la solution de (E_1) qui vérifie $g(0)=\sqrt{3}$ et $g'(0)=-2\Leftrightarrow A\cos(0)+B\sin(0)=\sqrt{3}$ et $-2A\sin(0)+2B\cos(0)=-2$ $\Leftrightarrow A=\sqrt{3}$ et $2B=-2$ ainsi $g(x)=\sqrt{3}\cos(2x)+(-1)\sin(2x)$