Géométrie et nombres complexes

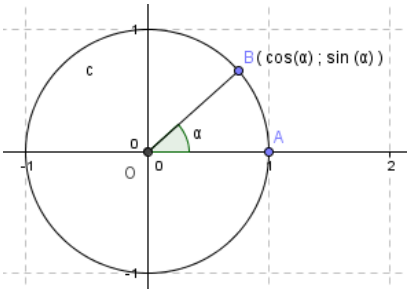
Tout ce qui suit se place dans un repère orthonormal.

I. Révisions : produits scalaires et trigonométrie

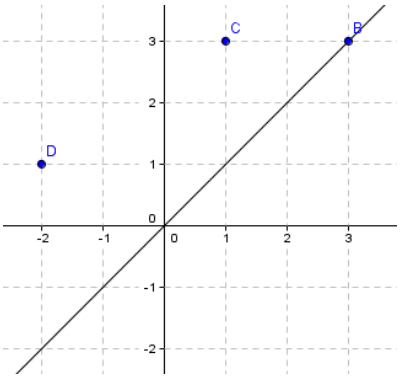
Définition
Pour tout $\vec{u}$ et $\vec{v}$ distincts du vecteur nul : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})$

Propriété
Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives : $\binom{x}{y}$ et $\binom{x'}{y'}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

Rappels de seconde
Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O, le centre du repère, de rayon 1 et pourvu d'un sens direct : le sens contraire du déplacement des aiguilles d'un montre.



A chaque point B du cercle trigonométrique on peut associer une infinité de mesure de la forme : $\widehat{AOM} + 2k\pi$. Ce sont les mesures de l'angle $\alpha = (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$. Le point M aura pour coordonnées : $M(\cos(\alpha)\,;\sin(\alpha))$.

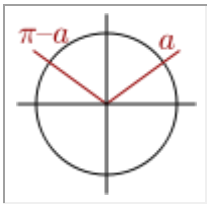
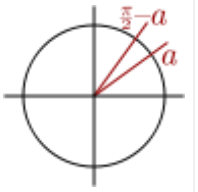
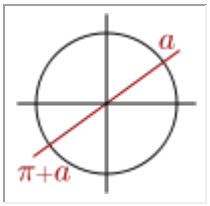
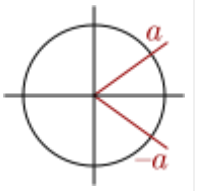


Symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$
Tracer B', C' et D' les symétriques des points B, C et D par rapport à la droite d'équation.
Après avoir observé les coordonnées des images et les avoir comparé avec celles de leurs antécédents, en déduire la propriété suivante :

Propriété
Soit $M(x,y)$ un point du plan alors M' son symétrique par rapport à la droite d'équations $y = x$ a pour coordonées (….. , ……)

Propriétés des arcs associés

On les montre aisément, à l'aide de symétries.

$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$ $\sin(\pi - a) = \sin(a)$		$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) =$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) =$	
$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$ $\sin(\pi + a) = -\sin(a)$		$\cos(-a) = \cos(a)$ $\sin(-a) = -\sin(a)$	

Comme on a pu le voir l'année dernière –a et $\pi - a$ sont associés respectivement aux symétries d'axe , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnée. $\pi + a$ est associée à la symétrie de centre l'origine du repère.
Quel est l'axe de symétrie correspondant à l'arc associé $\frac{\pi}{2} - a$?
En déduire le reste des formules

II. Formules d'addition

Soit M_1 et M_2 deux points du cercle trigonométriques, $\theta_1$et θ_2 deux mesures des angles associées à ces points.

On a donc : $M_1(\cos(\theta_1)$;) et $M_2($;)

Le but de l'activité est de déterminer les valeurs de $\cos(\theta_1+\theta_2)$, $\cos(\theta_1-\theta_2)$, $\sin(\theta_1+\theta_2)$ et $\sin(\theta_1-\theta_2)$,

Exprimer $(\overrightarrow{OM_2},\overrightarrow{OM_1})$ en fonction de $\theta_1$et θ_2 : $(\overrightarrow{OM_2},\overrightarrow{OM_1})$ =.....

Exprimer $\overrightarrow{OM_2}.\overrightarrow{OM_1}$ de deux manières différentes : $\overrightarrow{OM_2}.\overrightarrow{OM_1}$ =.....

$\overrightarrow{OM_2}\left(\quad\right).\overrightarrow{OM_1}\left(\quad\right)$ =.....

en déduire une expression de $\cos(\theta_1-\theta_2)$ en fonction de $\cos(\theta_1)$, $\cos(\theta_2)$, $\sin(\theta_1)$ et $\sin(\theta_2)$.

$\cos(\theta_1-\theta_2)$ = ...

De la même manière donner une expression de $\cos(\alpha-\beta)$

En remarquant que $(x+y)=\big(x-(-y)\big)$donner une expression de $\cos(x+y)$:

$\cos(x+y)$ =.....

A l'aide d'une formule d'arc associé et de ce qui a été vu précédemment donner deux expressions de :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right)$ = ...

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right)=\cos\left(\beta+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$=.....

En déduire une expression de $\sin(\alpha-\beta)$,

$\sin(\alpha-\beta)$, = ...

En vous inspirant des astuces utilisées précédemment déduire une expressions de $\sin(x+y)$.

$\sin(x+y)$ =

.....

Déduire de ces formules des expressions aussi compactes que possible de $\cos(2\alpha)$ et $\sin(2\alpha)$

$\cos(2\alpha)$ = ...=.....=.....

$\sin(2\alpha)$ = ...

Des différentes expressions de $\cos(2\alpha)$ déduire des expressions simples de $\cos^2(\alpha)$ et $\sin^2(\alpha)$

$\cos^2(\alpha)$ = ...

$\sin^2(\alpha)$ = ...

III. Rappels sur les complexes

Pour réviser en détail, consultez le cours de 1STL sur le site www.dimension-k.com

<u>Définition</u> :

On dit que a + bi est la forme algébrique du nombre complexe z.

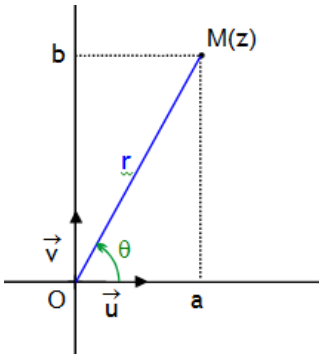
a est la partie réelle de z, on note $a = \mathrm{Re}(z)$

b est la partie imaginaire de z, on note $b = \mathrm{Im}(z)$.

La forme trigonométrique d'un nombre complexe z peut se noter de manière compacte $[r, \theta]$ ou complète : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

r est $|z|$ le module du nombre complexe z, il correspond à la distance entre O le centre du repère complexe et M le point dont l'affixe est z

θ est $\arg(z)$ UN argument du nombre complexe z, il correspond à une des mesures de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



Méthode pour passer d'une forme à l'autre

Si on connait a et b alors : $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et θ est une des solutions de $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$

Si on connait r et θ alors : $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$

<u>Propriétés calculatoires</u>

Attention pour gagner du temps et de la place, pour les arguments nous utiliserons souvent à la place de $2k\pi$ la notation $[2\pi]$ qui se dit modulo 2π.

Modules : $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|-z| = |z|$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

$|zz'| = |z|.|z'|$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Arguments $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$; $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \quad [2\pi]$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$; $\arg(z^n) = n\arg z \quad [2\pi]$

$\arg(\overline{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$; $\arg(-z) = \arg z + \pi \quad [2\pi]$

IV. forme exponentielle

Soit $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

Effectuer et simplifier au maximum les expressions issues de $z_1 z_2$, $\frac{1}{z_1}$ et $\frac{z_1}{z_2}$ en utilisant les formules découvertes au II.

Propriété :

Soit $z_1 = [r_1; \theta_1]$ et $z_2 = [r_2; \theta_2]$

Alors $z_1 z_2 = [\quad ; \quad]$ $\frac{1}{z_1} = [\quad ; \quad]$ $\frac{z_1}{z_2} = [\quad ; \quad]$

Rappel :

Soit a un réel non nul, m et n deux entiers relatifs alors $a^m a^n =$ ....., $\frac{1}{a^m} =$..... Et $\frac{a^m}{a^n} =$.....

Remarque : ces propriété sont aussi vrai si m et n au lieu d'être des entiers sont des réels.

Notation :

Pout tout nombre réel θ, on pose $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

Définition :
Tout nombre complexe dont le module est r et dont un des arguments est θ aura comme forme (ou écriture exponentielle : $z = re^{i\theta}$

D'après la propriété sur les opérations entre les complexes en écriture trigonométriques on a :

Propriété :
Pour tout nombre réel θ_1 et θ_2 on a :

$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ $\quad \frac{1}{e^{i\theta_1}} = e^{-i\theta_1}$ et $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

Et ainsi si on prend en plus r_1 et r_2 deux réels non nuls on aura :

$r_1e^{i\theta_1}\, r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ $\quad \frac{1}{e^{i\theta_1}} = \frac{1}{r_1}\, e^{-i\theta_1}$ et $\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

Conjugué

Rappel : soit $z = a + ib$ un complexe, alors son conjugué noté $\bar{z}$ est le complexe $\bar{z} = a + i\, b$
Si z admet comme représentation graphique le point M, alors $\bar{z}$ admettra comme représentation le point M' image de M par la symétrie d'axe, l'axe des réels.

Propriété : $\overline{\overline{z}} = z$ $\quad |\,\overline{z}\,| = |z|$ $\quad$ Si $z \neq 0$ $\quad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

$z.\overline{z} = |z|^2$ (donc $z.\overline{z}$ est un réel positif) $\quad z.\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

Propriété : le conjugué de $z = re^{i\theta}$ sera le nombre complexe $\bar{z} = r\, e^{-i\theta}$