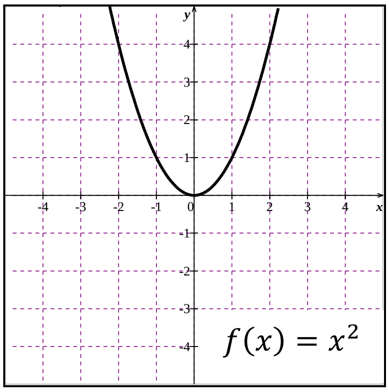
Limites de fonctions

Le zéro absolu ($-273{,}15$ °C) est la température la plus basse que l'on puisse envisager. C'est une valeur limite, c'est-à-dire que l'on peut s'en approcher au plus près, mais qu'on ne l'atteindra jamais. Plus généralement, pour les fonctions définies sur un intervalle ouvert, il est important de déterminer de quelles valeurs, si elles existent, s'approchent les images lorsque la variable tend vers les bornes de cet intervalle.

I. Les fonctions de référence

1er exemple : $f \;:\; x \mapsto x^2$

x	10^2	10^4	10^6	10^8
$f(x) = x^2$	10^4	10^8	10^{12}	10^{16}

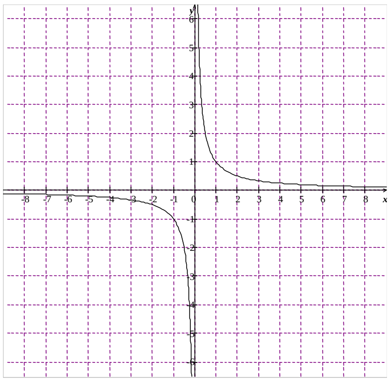


f est croissante, de plus, $x^2 > x$ dès que $x > 1$, donc lorsque x devient grand, $f(x)$ aussi.

Vocabulaire : On dit que la fonction $f \;:\; x \mapsto x^2$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Notation : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

2e exemple : $f \;:\; x \mapsto \frac{1}{x}$ pour $\in]0;+\infty[$, $f(x) \in]0;+\infty[$



x	1	0,1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$f(x) = 1 / x$	1	10	10^2	10^4	10^5	10^6

Lorsque x s'approche de 0, les valeurs de $f(x)$ augmentent très rapidement.

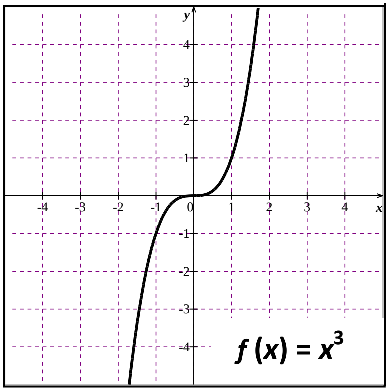
Vocabulaire :

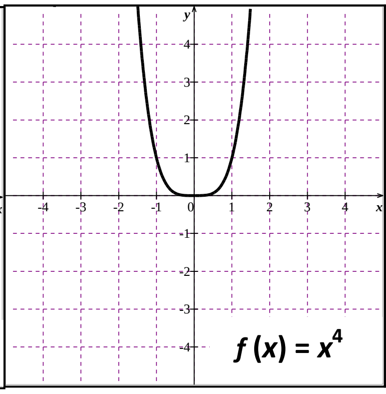
On dit que la fonction $f \;:\; x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour limite $+\infty$ en 0 sur $]0;+\infty[$.

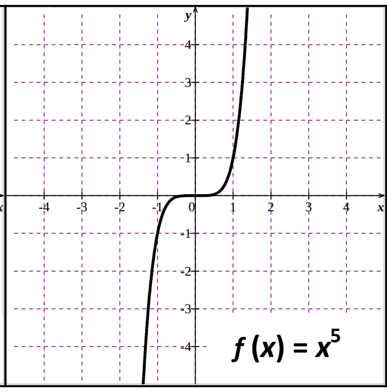
Notation : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$, on note aussi : $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

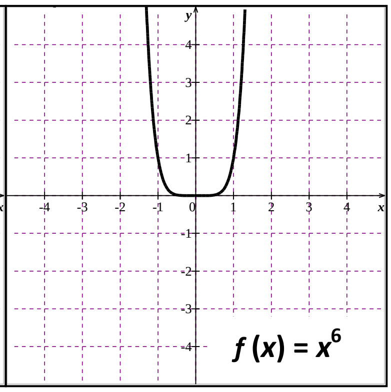
Autres exemples :

▶1. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$







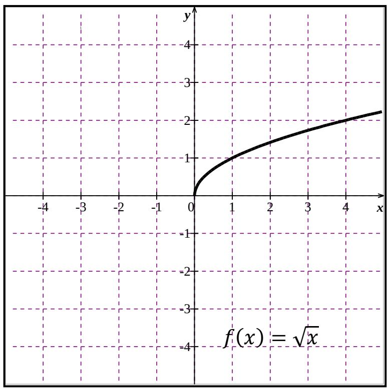


Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

Si n est impair $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$

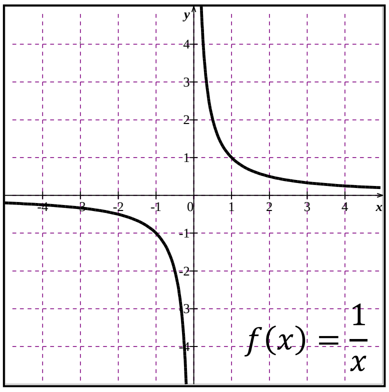
Si n est pair $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$

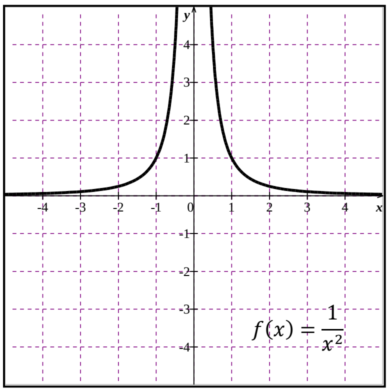
▶2. Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $f : x \mapsto \sqrt{x}$,

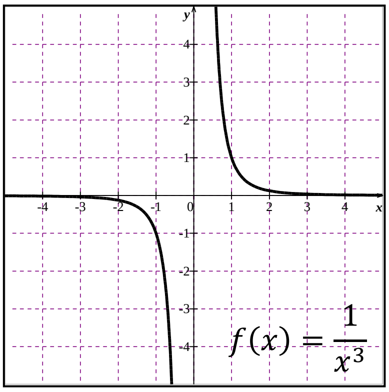


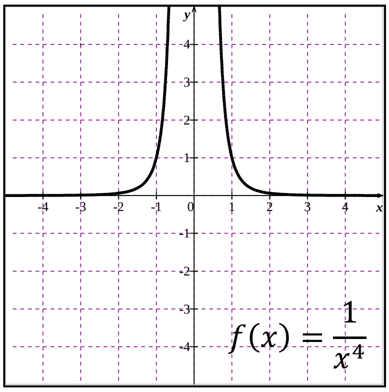
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

▶3. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$





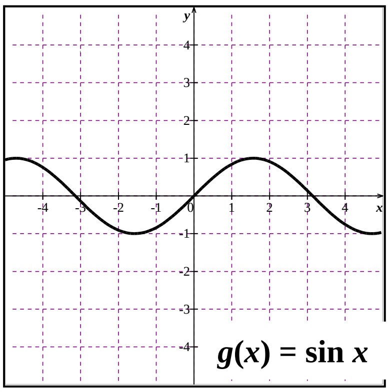


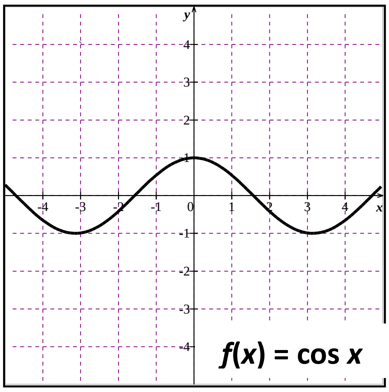


Si n est impair alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$ Si n est pair alors $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

►4. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \sin x$





Les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite ni en $-\infty$, ni en $+\infty$.

II. Opérations sur les limites

$a \in \mathbb{R}$ ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$, $L \in \mathbb{R}$

✶ Somme de fonctions.

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} v(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to a} [u(x)+v(x)]$	L+L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée	$-\infty$

✸ **Produit de fonctions.**

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)$	L	L $\neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} v(x)$	L'	$+\infty$ ou$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a}[u(x)\times v(x)]$	L×L'	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes	Forme indéterminée	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes

✸ **Inverse d'une fonction.**

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)$	L≠0	0^-	0^+	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{u(x)}$	$\frac{1}{\mathrm{L}}$	$-\infty$	$+\infty$	0^+	0^-

✸ **Quotient de fonctions.**

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)$	L	L≠0	L	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} v(x)$	L'≠0	0^+ ou 0^-	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	L'
alors $\lim\limits_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L'}}$	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes	0	Forme indéterminée		$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes

Exemple.

▶1. $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+\frac{1}{x}=+\infty$

▶2. $f(x)=(-x+7)\sqrt{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} -x+7=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+7)\sqrt{x}=-\infty$

▶3. $f(x)=\frac{1}{x-5}$ sur $]5,+\infty[$, $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} x-5=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to5^+}\frac{1}{x-5}=+\infty$

▶4. $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$ sur $]-1,+\infty[$, $\lim\limits_{x\to-1^+} x+1=0^+$et $\lim\limits_{x\to-1^+} 2x+3=-5$donc $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{2x-3}{x+1}=-\infty$

Exemples de forme indéterminées.

▶1.$f(x)=x^2+4x$ sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x=-\infty$, la forme est donc indéterminée.

Lorsqu'on a une forme indéterminée, on transforme l'écriture de la fonction pour lever l'indétermination.

$f(x)=x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)=1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+4x=+\infty$

▶2.$g(x)=\frac{2x-3}{x+1}$ sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty$, la forme est donc indéterminée.

$g(x)=\frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{3}{x}=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{x+1}=\frac{2}{1}=2$

Théorème de Composition des fonctions.

Soit *u* et *v* deux fonctions et $\boldsymbol{w}\ :\ \boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{v}\circ\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$

Si $\lim\limits_{x\to a}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}$ et $\lim\limits_{y\to b}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})=\mathbf{L}$ alors $\lim\limits_{x\to a}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})=\mathbf{L}$

Théorème des gendarmes.

Si $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\leq\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\leq\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})=\mathbf{L}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\mathbf{L}$.

Exemple.

$f(x)=\frac{\cos x}{x^2}$ sur $]0,+\infty[$, pour tout x $-1\leq\cos x\leq1$ donc $\frac{-1}{x^2}\leq\frac{\cos x}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^2}=0$.

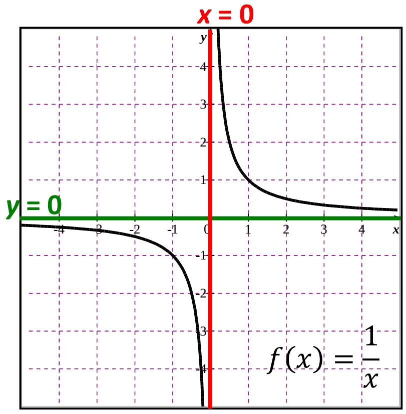
Théorème.

Si $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\leq\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

III. Les asymptotes

Le terme « asymptote » signifie que la courbe représentative de la fonction se rapproche indéfiniment d'une autre courbe en un point ou en l'infini sans jamais la couper.

Exemple. La fonction inverse $\boldsymbol{f \;:\; x \mapsto \frac{1}{x}}$



Lorsque *x* prend des valeurs de plus en plus proche de 0, les points de la courbe représentative de *f* sont de plus en plus proches de l'axe des ordonnées.

Vocabulaire.
On dit que l'axe des ordonnées, d'équation *x* = 0, est une **asymptote verticale** de la courbe de *f*.

Lorsque *x* prend des valeurs de plus en plus grandes en valeur absolue, les points de la courbe représentative de *f* sont de plus en plus proches de l'axe des abscisses.

Vocabulaire.
On dit que l'axe des abscisses, d'équation *y* = 0, est une **asymptote horizontale** de la courbe de *f* en +∞ et en −∞.

Propriété.
Soit *f* une fonction telle que $\lim\limits_{x \to a} \boldsymbol{f(x)} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} \boldsymbol{f(x)} = -\infty$, alors la courbe représentative de *f* admet une **asymptote verticale** d'équation *x* = *a*.

Propriété.
Soit *f* une fonction, si $\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x)} = \mathbf{L}$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} \boldsymbol{f(x)} = \mathbf{L}$ alors la courbe représentative de *f* admet une **asymptote horizontale** d'équation *y* = L.

Propriété.
Soit *f* une fonction, si $\lim\limits_{x \to +\infty} [\boldsymbol{f(x) - (ax+b)}] = \mathbf{0}$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} [\boldsymbol{f(x) - (ax+b)}] = \mathbf{0}$ alors la courbe représentative de *f* admet une **asymptote oblique** d'équation *y* = *ax* + *b*.

Exemple. Asymptote oblique

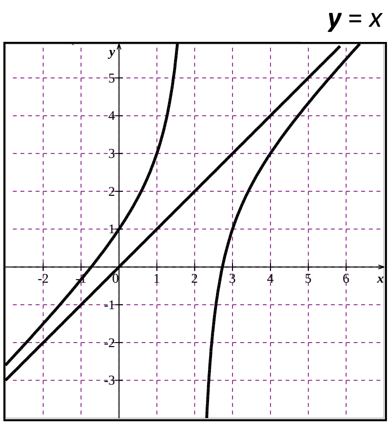
$f(x) = \frac{x^2-2x-2}{x-2}$, on écrit *f* sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

$$ax + b + \frac{c}{x-2} = \frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2} = \frac{ax^2 + (-2a+b)x - 2b + c}{x-2}$$

donc $\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = -2 \\ -2b + c = -2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -2 \end{cases}$

Donc $f(x) = x + \frac{-2}{x-2}$ d'où $f(x) - x = \frac{-2}{x-2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{x-2} = 0$

Donc la courbe de *f* admet une asymptote oblique d'équation *y* = *x*.



$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 2}}$$