Activité :

Equation du second degré

Le but de l'activité est de résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ dans $\mathbb{C}$

1) Montrez que l'on peut mettre $az^2 + bz + c$ sous la forme $a((z + A)^2 - B^2)$, exprimez A et B^2 en fonction de a, b et c.
2) Exprimez B^2 en fonction de Δ
3) Déduisez en les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ (en fonction de a, b et c) quand $\Delta > 0$.
4) Même question quand $\Delta = 0$

Maintenant on se place sous l'hypothèse que $\Delta < 0$,

5) exprimez B en fonction de a, b, Δ et i *
6) En déduire les solutions $az^2 + bz + c = 0$
7)

* On peut garder en tête que si $z^2 = -5$ alors $z = \pm i\sqrt{5}$ ou encore $\pm i\sqrt{-(-5)}$

Solutions

1) $a((z + A)^2 + B^2) = a((z^2 + 2Az + A^2) - B^2)$
$= az^2 + 2aAz + aA^2 - aB^2$

Donc pour que $a((z + A)^2 + B^2)$ soit égal à $az^2 + bz + c$ on doit avoir :

$2aA = b$ et $aA^2 - aB^2 = c$ (Identification)

Donc $A = \frac{b}{2a}$ et $a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - c = aB^2$

$A = \frac{b}{2a}$ et $\frac{b^2-4ac}{4a^2} = B^2$

2) $B^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ donc $az^2 + bz + c = a((z + A)^2 + B^2) = a\left[(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

3) si $\Delta > 0$ $B = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ remarque : le $\pm$ règle le problème du signe de a

On sait que $(x + y)^2 = (x + y)(x - y)$

Donc $a((z + A)^2 - B^2) = a((z + A) + B)((z + A) - B)$
$= a(z + A + B)(z + A - B)$

Donc ici $a((z + A)^2 - B^2) = a(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})$
$= a(z + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a})(z + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a})$

Donc $az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a(z + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a})(z + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}) = 0$

Donc les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ sont : $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

4) Si $\Delta = 0$ alors $B = 0$ et donc $a((z + A)^2 + B^2) = a(z + A)^2$

Ainsi $az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a(z + A)^2 = 0$

Donc $az^2 + bz + c = 0$ n'a qu'une seule solution $-A$ autrement dit $-\frac{b}{2a}$

5) si $\Delta < 0$ alors $\Delta = -\sqrt{-\Delta}^2 = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$ (en effet $-i^2 = 1$)

donc $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$ donc $az^2 + bz + c = a\left[(z + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]$

$= a(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a})(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a})$

$= a(z + \frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a})(z + \frac{b-i\sqrt{-\Delta}}{2a})$

Donc les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ sont : $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$