Correction d'exercices du livre sur les complexes

Exercice 65 P 42

z=$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc z= $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et donc

$z^2=e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$z^3=e^{i\frac{3\pi}{3}}$	$z^4=e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$z^5=e^{i\frac{5\pi}{3}}$	$z^6=e^{i\frac{6\pi}{3}}$
$=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$=-1$	$=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$	=1

Exercice 67 P 42

Z=$\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}=\frac{3+i2\sqrt{3}-1}{4}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=[1,\frac{\pi}{3}]$ (trivial … à force)

$z^3=[1,\frac{\pi}{3}]^3=\left[1^3,\frac{\pi}{3}\times 3\right]=[1,\pi]$ =-1

Exercice 71 P 42

$\lvert z_1\rvert=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$	$\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{1}{2}\end{cases}$	$\theta=\frac{\pi}{6}$	donc $z_1=2e^{i\frac{\pi}{6}}$
$\lvert z_2\rvert=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$	$\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\end{cases}$	$\theta=\frac{-\pi}{4}$	donc $z_2=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
$\lvert z_3\rvert=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$	$\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{1}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{-\sqrt{3}}{2}\end{cases}$	$\theta=\frac{-\pi}{3}$	donc $z_3=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$
$\lvert z_4\rvert=\sqrt{\sqrt{3}^2+3^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$	$\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$	$\theta=\frac{\pi}{3}$	donc $z_4=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$
$\lvert z_5\rvert=\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{1}$	$\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{-1}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{-\sqrt{3}}{2}\end{cases}$	$\theta=\frac{4\pi}{3}$	donc $z_5=e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Exercice 72 P 42

Z = $\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$

= $\left(\frac{e^{i2\theta}+2e^{i\theta}e^{-i\theta}+e^{-i2\theta}}{4}\right)+\left(\frac{e^{i2\theta}-2e^{i\theta}e^{-i\theta}+e^{-i2\theta}}{-4}\right)$

=$\left(\frac{e^{i2\theta}+2e^{i\theta}e^{-i\theta}+e^{-i2\theta}-e^{i2\theta}+2e^{i\theta}e^{-i\theta}-e^{-i2\theta}}{4}\right)$ or $e^{i\theta}e^{-i\theta}=1$ donc

=$\left(\frac{4}{4}\right)$=1

Ce résultat était prévisible car d'après les formules d'euler.

Explications : vu que $\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, que $\sin(\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ et que l'on sait depuis la troisième que $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$ on peut en déduire que z = 1

Exercice 73 P 13

a) f(θ) $=\sin^4(\theta)=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4=\left(\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2\right)^2=\left(\frac{e^{i2\theta}-2e^{i\theta}e^{-i\theta}+e^{-i2\theta}}{-4}\right)^2$

$=\left(\frac{e^{i4\theta}-2e^{i2\theta}+1-2e^{i2\theta}+4-2e^{-i2\theta}+1-2e^{-i2\theta}+e^{-i4\theta}}{16}\right)=\left(\frac{e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}}{16}-4\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{16}+\frac{6}{16}\right)$

$=\left(\frac{1}{8}\frac{e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}}{2}-\frac{1}{2}\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2}+\frac{6}{16}\right)=\frac{1}{8}\cos(4\theta)-\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{3}{8}$

b) comme $\sin^2 a=\frac{1}{2}(1-\cos(2a))$ on aura $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos(2x))$

de plus $\cos^2 a=\frac{1}{2}(1+\cos(2a))$ donc $\cos^2(2x)=\frac{1}{2}(1+\cos(4x)$

donc f(x) $= (\sin^2 x)^2 = (½(1-\cos(2x))^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos(2x) + cos^2(2x)\right)$

$= \frac{1}{4}(1 - 2\cos(2x) + ½(1 + \cos(4x)) = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$

c) F(x) = $\frac{-1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x$

Exercice 74 P 13

a) f(θ) $= \sin(2\,\theta)\sin(3\,\theta) = \frac{e^{i2\theta} - e^{-i2\theta}}{2i} \times \frac{e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}}{2i} = \frac{e^{i5\theta} - e^{-i\theta} - e^{i\theta} + e^{-i5\theta}}{-4}$

$= \frac{e^{i5\theta} + e^{-i5\theta} - e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{-4} = \frac{1}{2}(\cos(\theta) - \cos(5\theta))$

b) f(θ) $= \cos(\theta)\cos(2\,\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \times \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} = \frac{e^{i3\theta} + e^{-i\theta} + e^{i\theta} + e^{-i3\theta}}{4}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}}{2} + \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cos(3\theta) + \cos(\theta))$

c) f(θ) $= \sin(\theta)\cos(3\,\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \times \frac{e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}}{2} = \frac{e^{i4\theta} + e^{-i2\theta} - e^{i2\theta} - e^{-i4\theta}}{4i}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i4\theta} - e^{-i4\theta}}{2i} - \frac{e^{i2\theta} - e^{-i2\theta}}{2i}\right) = \frac{1}{2}(\sin(4\theta) - \sin(2\theta))$

d) f(θ) $= \sin(4\,\theta)\cos(\theta) = \frac{e^{i4\theta} - e^{-i4\theta}}{2i} \times \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{e^{i5\theta} + e^{+i3\theta} - e^{-i3\theta} - e^{-i5\theta}}{4i}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i5\theta} - e^{-i5\theta}}{2i} + \frac{e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}}{2i}\right) = \frac{1}{2}(\sin(5\theta) + \sin(3\theta))$

Exercice 75 P 13

1 a) $\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^3 = \left(e^{i3\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-i3\theta}\right) = \left(e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}\right) - 3\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

b) $\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^3 = (2i\sin\theta)^3 = -8i\sin^3\theta$

$\left(e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}\right) = 2i\sin 3\theta$

$\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = 2i\sin\theta$

Donc $\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^3 = \left(e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}\right) - 3\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$ peut se traduire par :

$-8i\sin^3\theta = 2i\sin 3\theta - 3\times 2i\sin\theta$

$4\sin^3\theta = -\sin 3\theta + 3\sin\theta$

$4\sin^3\theta - \sin\theta = -\sin 3\theta + 2\sin\theta$ ou encore $\mathbf{4\sin^3\theta - \sin\theta = 2\sin\theta - \sin 3\theta}$

2 a) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou π

b) $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}\ ou\ \frac{5\pi}{6}$

c) $\sin x = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6}\ ou\ \frac{11\pi}{6}$

3 $2\sin\theta - \sin 3\theta = 0 \Leftrightarrow 4\sin^3\theta - \sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow (4\sin^2\theta - 1)\ \sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin\theta - 1)(2\sin\theta + 1)\ \sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow \sin\theta = 0\ ou\ \frac{1}{2}\ ou\ \frac{-1}{2}$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou π ou $\frac{\pi}{6}\ ou\ \frac{5\pi}{6}$ ou $\frac{7\pi}{6}\ ou\ \frac{11\pi}{6}$

Voici les solutions dans [0,2π[$S = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

Exercice 76 P43

$|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = |z_E| = |z_F| = 1$

$\text{Arg}(z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = 0$ donc $z_A = 1$

$\text{Arg}(z_B) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}$ donc $z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\text{Arg}(z_C) = (\vec{u}, \overrightarrow{OC}) = \frac{2\pi}{3}$ donc $z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\text{Arg}(z_D) = (\vec{u}, \overrightarrow{OD}) = \pi$ donc $z_D = -1$

$\text{Arg}(z_E) = (\vec{u}, \overrightarrow{OE}) = \frac{4\pi}{3}$ donc $z_E = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$\text{Arg}(z_F) = (\vec{u}, \overrightarrow{OF}) = \frac{5\pi}{3}$ donc $z_F = e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Exercice 79 P 43

Si G est le barycentre de (A ;1) , (B ;2) et (C ;3) alors on a (1+2+3) $\overrightarrow{OG} = 1\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$

Donc $6z_{\overrightarrow{OG}} = z_{\overrightarrow{OA}} + 2z_{\overrightarrow{OB}} + 3z_{\overrightarrow{OC}}$ et donc $6z_G = z_A + 2z_B + 3z_C$

$6z_G = 1 - j + 2(2+3j) + 3(-2-5j)$

$6z_G$=1-j + 4+6j -6 -15j

$6z_G$=-1-10j $\qquad z_G = \frac{-1}{6}$-$\frac{10}{6}$j

Exercice 80 P 43

1)

$z_1 = 3(cos\pi + isin\pi) = -3$

$z_2 = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$

$z_3 = \overline{z_2} = 1 - i$

2) 3)

$z_3 = \overline{z_2}$ donc A_2etA_3 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, de plus $z_1$est réel donc A_1est sur l'axe des abscisse, ainsi $[A_1A_2]$et$[A_1A_3]$sont symétriques par rapport à cet axe, conclusion le triangle est isocèle en A_1

4)

B_2etB_3 sont les symétriques respectifs de A_2etA_3 par rapport à A_1

Donc $\overrightarrow{A_1B_2} = \overrightarrow{A_2A_1}$ et $\overrightarrow{A_1B_3} = \overrightarrow{A_3A_1}$ d'où $z_{B_2} - z_{A_1} = z_{A_1} - z_{A_2}$ et $z_{B_3} - z_{A_1} = z_{A_1} - z_{A_3}$

Donc $z_{B_2} = 2z_{A_1} - z_{A_2} = -6 - 1 - i = -7 - i$ $\qquad |z_{B_2}| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

et $z_{B_3} = 2z_{A_1} - z_{A_3}$=$-6 - 1 + i = -7 + i$ $\qquad |z_{B_3}| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\frac{OB_2}{OA_2} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$=5

5)

$A_2A_3B_2B_3$est un quadrilatère dont les diagonales sont de même mesure (cf question 3), se coupent en leur milieu A_1(centre de symétrie) c'est donc un rectangle.

Exercice 81 P 44

1)

$z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ a pour module 2 pour argument $\frac{\pi}{3}$

$|z_2| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\begin{cases}\cos(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{-1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ $\qquad \theta = \frac{2\pi}{3}$ $\qquad$ donc $z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$z_3 = \frac{4\sqrt{3}z_2}{9z_1} = \frac{4\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}}{9\times 2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{24e^{i\frac{2\pi}{3}}}{18e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{4}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ ce complexe a pour module $\frac{4}{3}$ et pour antécédent $\frac{\pi}{3}$

2)

OA² = $|z_1|^2$=2²=4 $\qquad$ OB² = $|z_2|^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$=12 $\qquad$ AB² = $|z_2 - z_1|^2$=$|2\sqrt{3}$+2i$|^2$=$(2\sqrt{3})^2$+2²=16

On a donc AB² =OA²+OB² donc OAB est rectangle en O(réciproque du théorème de Pythagore).

Affixe de I milieu de [AB] : $\frac{z_1+z_2}{2} = \frac{\sqrt{3}+i-\sqrt{3}+3i}{2} = 2i$

M isobarycentre de A, B,O veut dire que M est le barycentre de (A,1), (B,1),(O,1)

Comme I est le milieu de [AB] on peut aussi dire que I est le barycentre de (A,1), (B,1)

Ainsi le barycentre de de (A,1),(B,1),(O,1) est le barycentre de (I,2),(O,1) (associativité des barycentres)

M bar ((I,2),(O,1)) ⇔ $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OI}$ ⇔$z_{\overrightarrow{OM}} = \frac{2}{3}z_{\overrightarrow{OI}}$⇔$z_M = \frac{2}{3}z_I$⇔$z_M = \frac{2}{3}2i = \frac{4}{3}i$

Donc M le centre de gravité du triangle OAB a pour affixe $\frac{4}{3}i$, complexe différent de l'affixe de G, on pourra déduire que G n'est pas le barycentre comme l'indiquait l'énoncé.

Exercice 87 P 45

1)

$z_{M'} = \frac{1}{\overline{z_M}} = \frac{1}{x-iy} = \frac{(x+iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x+iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$ complexe dont la partie réelle est $\frac{x}{x^2+y^2}$ et la partie imaginaire est $\frac{y}{x^2+y^2}$ ainsi x'=$\frac{x}{x^2+y^2}$ et y'=$\frac{y}{x^2+y^2}$

2)

$z_{B'} = \frac{\frac{-1}{2}}{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2} + i\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} + i\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = -1 + i$

$z_{D'} = \frac{-2}{(-2)^2+(-1)^2} + i\frac{-1}{(-2)^2+(-1)^2} = \frac{-2}{5} + i\frac{-1}{5}$

$z_{\overrightarrow{OB'}} = -1 + i = 2(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}) = 2z_{\overrightarrow{OB}}$ donc $\overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}$ donc O,B et B' sont alignés

$z_{\overrightarrow{OD'}} = \frac{-2}{5} + i\frac{-1}{5} = \frac{1}{5}(-2 - i) = \frac{1}{5}z_{\overrightarrow{OD'}}$ donc $\overrightarrow{OD'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OD}$ donc O,D et D' sont alignés

$|z_A - z_B| = \left|i + \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$|z_{B'} - z_B| = \left|-1 + i + \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-1}{2} + i\frac{1}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$|z_C - z_B| = \left|-1 + \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-1}{2} + i\frac{-1}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$|z_{D'} - z_B| = \left|\frac{-2}{5} + i\frac{-1}{5} + \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-4}{10} + i\frac{-2}{10} + \frac{5}{10} - i\frac{5}{10}\right| = \left|\frac{1}{10} + i\frac{-7}{10}\right| = \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{49}{100}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc A, B',C et D' sont situés à une distance $\frac{\sqrt{2}}{2}$ de B

Pour placer B' et D' on sait que ces points sont sur le même cercle centré en B et passant par A et C , de plus ces points sont respectivement sur (OB) et (OD). On prends des deux couples de points d'intersection , celui qui convient.

Exercice 88 P45

Soit z = x + i y

(i – 2) z – (2 + i) $\overline{z}$ + 6 = 0

⇔ (i – 2) (x + i y) – (2 + i) (x - i y)+ 6 = 0

⇔ xi –y -2x – i2y -2x + i2y – ix – y + 6 = 0 + i0

⇔–2y -4x + 6= 0

⇔y = -2x + 3

Les solutions de l'équation sont donc les complexes de la forme z=x+ i(3-2x)

Les points correspondants sont les points de la droite d'équation y = -2x + 3

Exercice 89 P 45

1) $|z - 2 - 2i| = |z - (2 + 2i)| = |z - z_1|$

$|z + 2i| = |z - (-2i)| = |z - z_2|$

$|z - 2 - 2i| = |z + 2i|$ ⇔$|z - z_1| = |z - z_2|$ ⇔ AM = CM

Les solutions de l'équation sont donc les affixes des points constituant la médiatrice du segment [AC].

2) $z_3 = \frac{3+8i}{2i} = -1{,}5i + 4$

$z_4 = \frac{1}{4}(7 + i)(i - 1) = \frac{1}{4}(7i - 7 - 1 - i) = \frac{1}{4}(6i - 8) = 1{,}5i - 2$

Pour vérifier si les points B et D respectivement d'affixes z_3 et z_4 sont bien sur Δ il suffit de vérifier si z_3 et z_4 sont des solutions de $|z - 2 - 2i| = |z + 2i|$

$|z_3 - 2 - 2i| = |-1{,}5i + 4 - 2 - 2i| = |2 - 3{,}5i| = \sqrt{2^2 + (-3{,}5)^2} = \sqrt{4 + 12{,}25} = \sqrt{16{,}25}$

$|z_3 + 2i| = |-1{,}5i + 4 + 2i| = |0{,}5i + 4| = \sqrt{4^2 + (0{,}5)^2} = \sqrt{16 + 0{,}25} = \sqrt{16{,}25}$

Donc B ∈ Δ

$|z_4 - 2 - 2i| = |1{,}5i - 2 - 2 - 2i| = |-4 - 0{,}5i| = \sqrt{(-4)^2 + (-0{,}5)^2} = \sqrt{16 + 0{,}25} = \sqrt{16{,}25}$

$|z_4 + 2i| = |1{,}5i - 2 + 2i| = |-2 + 3{,}5i| = \sqrt{(-2)^2 + 3{,}5^2} = \sqrt{4 + 12{,}25} = \sqrt{16{,}25}$

Donc D ∈ Δ