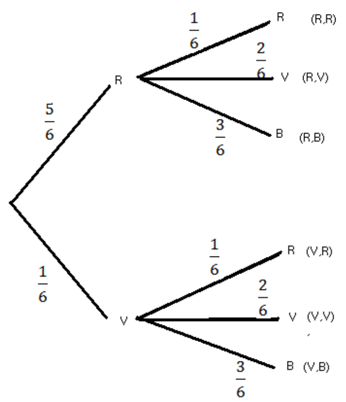
Correction du devoir maison n°2

Exercice 59 P 117



1)

P(A) = P({(R,R)}) = $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$

P(B) = P({(R,R) ;(V,V)}= $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{36}+\frac{2}{36}=\frac{7}{36}$

P(C) = P({(R,V) ;(V,R)}= $\frac{5}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{10}{36}+\frac{1}{36}=\frac{11}{36}$

P(D) = P({(R,V) ;(R,B);(V,R);(V;B)}

$=\frac{5}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{10}{36}+\frac{15}{36}+\frac{1}{36}+\frac{3}{36}=\frac{29}{36}$

Ou encore : P(D) = P($\bar{B}$) = 1 - P(B) = $1-\frac{7}{36}=\frac{29}{36}$

2)

P(X=5) = P(A) = $\frac{5}{36}$

P(X=2) = P({V,V})= $\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{36}$

P(X=-x) = P(D) = $\frac{29}{36}$

E(X) = 5 P(X=5)+2 P(X=2)-x P(X=-x) = $5\,\frac{5}{36}+2\,\frac{2}{36}-x\,\frac{29}{36}=\frac{25+4-29x}{36}=\frac{29(1-x)}{36}$ pour que le jeux soit équitable (c'est-à-dire que E(X) = 0) on doit avoir x = 1

Exercice 105 P 160

1) a) $\tan(\alpha)=\frac{opp}{adj}=\frac{37,3}{x}$ et $\tan(\beta)=\frac{37,3+5,6}{x}=\frac{42,9}{x}$

b) $\tan(\theta)=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan(\beta)-\tan(\alpha)}{1+\tan(\beta)\tan(\alpha)}=\frac{\frac{42,9}{x}-\frac{37,3}{x}}{1+\frac{42,9}{x}\times\frac{37,3}{x}}=\frac{x(42,9-37,3)}{x^2+42,9\times37,3}=\frac{5,6x}{x^2+1600,17}$

2) f(x)= $\frac{5,6x}{x^2+1600,17}$

donc en posant u(x) = 5,6x et v(x) = x²+1600,17 on aura u'(x)=5,6 et v'(x) = 2x

et donc f'(x) = $\frac{5,6(x^2+1600,17)-5,6x2x}{(x^2+1600,17)^2}=\frac{5,6(1600,17-x^2)}{(x^2+1600,17)^2}=\frac{5,6(\sqrt{1600,17}-x)(\sqrt{1600,17}+x)}{(x^2+1600,17)^2}$

x	0		δ		100
$(\sqrt{1600,17}-x)$		+	0	-	
$(\sqrt{1600,17}+x)$		+	|	+	
$(x^2+1600,17)^2$		+	|	+	
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	M	↘	≈0,048

j'ai posé $\delta=\sqrt{1600,17}$

la fonction f admet un maximum pour x = $\sqrt{1600,17}$

le maximum sera donc f($\sqrt{1600,17}$)= $\frac{5,6\sqrt{1600,17}}{\sqrt{1600,17}^2+1600,17}=\frac{5,6\sqrt{1600,17}}{3200,34}\approx$ 0,06999

et donc la plus grande valeur de θ sera $\tan^{-1}\left(\frac{5,6\sqrt{1600,17}}{3200,34}\right)\approx 4°\approx 0,0699 rad$

Exercice 120 P 162

P(1) = 4 – 8 + 1 + 3 = 0

Donc 1 est une racine de P et donc P(x) peut s'écrire sous la forme (x-1) Q(x) avec Q(x) un polynôme de degrés 2

Ainsi nous cherchons les réels a, b et c tels que P(x) = $(x-1)(ax^2+bx+c)$

⇔ $4x^3-8x^2+x+3=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c$

⇔$4x^3-8x^2+x+3=ax^3+x^2(b-a)+x(c-b)-c$ par identification on a : $\begin{cases}4=a\\-8=b-a\\1=c-b\\3=-c\end{cases}$ ⇔ $\begin{cases}a=4\\-4=b\\1=c-b\\c=-3\end{cases}$

Donc P(x) = (x-1)(4x²-4x-3)

Résolution de 4x²-4x-3 = 0

$\Delta=(-4)^2-4\times4\times(-3)=16+48=64$=8² $x_1=\frac{4-8}{8}=-0,5$ et $x_2=\frac{4+8}{8}=1,5$

Donc 4x²-4x-3= 4(x+0,5)(x-1,5) et donc P(x) = (x-1) 4 (x+0,5) (x-1,5)

P(cos(x)) =$4\cos(x)^3-8\cos(x)^2+\cos(x)+3$ et aussi : P(cos(x)) = (cos(x)-1) 4 (cos(x)+0,5) (cos(x)-1,5)

Donc $4\cos(x)^3-8\cos(x)^2+\cos(x)+3=0$ ⇔(cos(x)-1) 4 (cos(x)+0,5) (cos(x)-1,5)= 0

⇔ cos(x) = 1 ou cos(x) = -0,5 ou cos (x) = 1,5

⇔ cos(x) = 1 ou cos(x) = -0,5

⇔ x = 0 [2π] ou x = $\frac{2\pi}{3}$[2π] ou x = $\frac{4\pi}{3}$[2π]

⇔ x = 0 $\left[\frac{2\pi}{3}\right]$

Exercice 121 P162

1) f(t+T)= $3\cos\left(\omega(t+T)\right)=3\cos(\omega t+\omega T)=3\cos(\omega t)=f(t)$ car $\omega T=2\pi$ et cos est une fonction 2π périodique.

g(t+T)= $4\cos\left(\omega(t+T)+\frac{\pi}{2}\right)=4\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}+\omega T\right)=4\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=g(t)$ car $\omega T=2\pi$ et cos est une fonction 2π périodique.

2)

f'(t)=$-3\omega\sin(\omega t)$ or sin (x) est positive pour x dans $[0,\pi]$ et négative pour x dans $[\pi\ ;2\pi]$

Donc $\sin(\omega t)$ est positive pour t dans $[\frac{0}{\omega},\frac{\pi}{\omega}]$ et négative pour t dans $[\frac{\pi}{\omega}\ ;\frac{2\pi}{\omega}]$ or $\frac{\pi}{\omega}=\frac{1}{2000}=\frac{T}{2}$ ainsi

$\sin(\omega t)$ est positive pour t dans $[0,\frac{T}{2}]$ et négative pour t dans $[\frac{T}{2}\ ;T]$

x	0	$\frac{T}{2}$	T
-3	-		-
sin (ωt)	+	0	-
f'(x)	-	0	+
f(x)	3 ↘	-3	↗ 3

g'(t)=-4ω $\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$ = -4ω $\cos(\omega t)$

or cos(x) est positif pour les x de $[0\ ;\frac{\pi}{2}]$ et de $[\frac{3\pi}{2}\ ;2\pi]$ et négatif pour les x de $[\frac{\pi}{2}\ ;\frac{3\pi}{2}]$

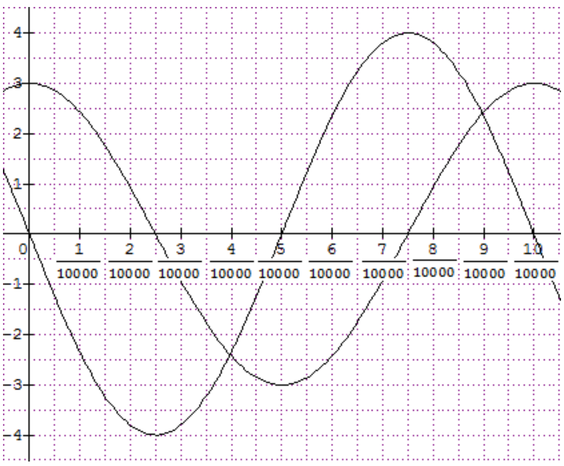
donc $\cos(\omega t)$ est positif pour les x de $[0\ ;\frac{\pi}{2\omega}]$ et de $[\frac{3\pi}{2\omega}\ ;\frac{2\pi}{\omega}]$ et négatif pour les x de $[\frac{\pi}{2\omega}\ ;\frac{3\pi}{2\omega}]$

or $\frac{\pi}{\omega}=\frac{1}{2000}=\frac{T}{2}$

donc $\cos(\omega t)$ est positif pour t dans $[0,\frac{T}{4}]$ et $[\frac{3T}{4}\ ;T]$ et négative pour x dans $[\frac{T}{4}\ ;\frac{3T}{4}]$

x	0		$\frac{T}{4}$		$\frac{3T}{4}$		T
-4		-		-		-	
		+	0	-	0	+	
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	0	↘	-4	↗	4	↘	0

t	0	$\frac{1}{8000}$	$\frac{1}{4000}$	$\frac{3}{8000}$	$\frac{1}{2000}$	$\frac{5}{8000}$	$\frac{3}{4000}$	$\frac{7}{8000}$	$\frac{1}{1000}$
f(t)	3	2,12132	0	-2,12132	-3	-2,12132	0	2,12132	3
g(t)	0	2,828427	4	2,828427	0	-2,82843	-4	-2,82843	0



$$\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{\mathbf{16}}=\frac{(3\cos(\omega t))^2}{9}+\frac{\left(4\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right)^2}{16}$$
$$=\frac{(3\cos(\omega t))^2}{9}+\frac{(4\sin(\omega t))^2}{16}$$
$$=\frac{9(\cos(\omega t))^2}{9}+\frac{16(\sin(\omega t))^2}{16}$$
$$=(\cos(\omega t))^2+(\sin(\omega t))^2=1$$

Donc $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{16}=1$

Réponse à la question 2 **Version Hard Core**

sin (x) est positive pour x dans $[0,\pi]$ et $[2\pi\ ;3\pi]$ et négative pour x dans $[\pi\ ;2\pi]$

en posant x = $\omega t+\frac{\pi}{2}$ on a t = $\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\omega}$

donc $\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$ sera positive pour x dans $[\frac{0-\frac{\pi}{2}}{\omega},\frac{\pi-\frac{\pi}{2}}{\omega}]$ et $[\frac{2\pi-\frac{\pi}{2}}{\omega}\ ;\frac{3\pi-\frac{\pi}{2}}{\omega}]$ et négative pour x dans $[\frac{\pi-\frac{\pi}{2}}{\omega}\ ;\frac{2\pi-\frac{\pi}{2}}{\omega}]$ or $\frac{\pi}{\omega}=\frac{1}{2000}=\frac{T}{2}$

donc $\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$ sera positive pour x dans $[-\frac{T}{4},\frac{T}{4}]$ et $[\frac{3T}{4}\ ;\frac{5T}{4}]$ et négative pour x dans $[\frac{T}{4}\ ;\frac{3T}{4}]$

nous on s'interesse à ce qui se passe dans $[0\ ;T]$ donc on peut ne pas parler de ce qui se passe en dehors de cet intervalle.

donc $\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$ sera positive pour t dans $[0,\frac{T}{4}]$ et $[\frac{3T}{4}\ ;T]$ et négative pour x dans $[\frac{T}{4}\ ;\frac{3T}{4}]$