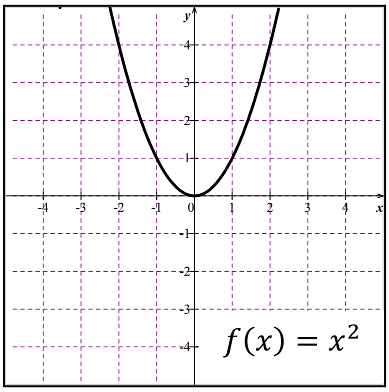
gaelle.buffet@ac-montpellier.fr

Chap 4. Fonctions et limites

I. Les fonctions de référence

1^er^ exemple : $f \;:\; x \mapsto x^2$

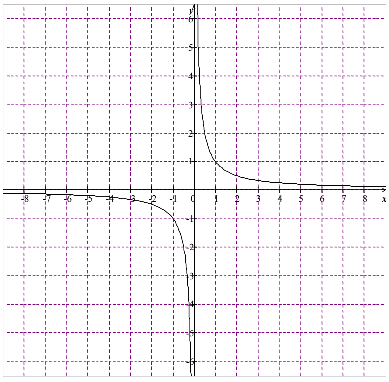
x	10^2	10^4	10^6	10^8
$f(x) = x^2$	10^4	10^8	10^{12}	10^{16}



f est croissante, de plus, $x^2 > x$ dès que $x > 1$, donc lorsque x devient grand, $f(x)$ aussi.

Vocabulaire : On dit que la fonction $f \;:\; x \mapsto x^2$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Notation : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$



2^e^ exemple : $f \;:\; x \mapsto \frac{1}{x}$ pour $x \in]0,+\infty[$, $f(x) \in]0,+\infty[$

x	1	0,1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$f(x) = 1 / x$	1	10	10^2	10^4	10^5	10^6

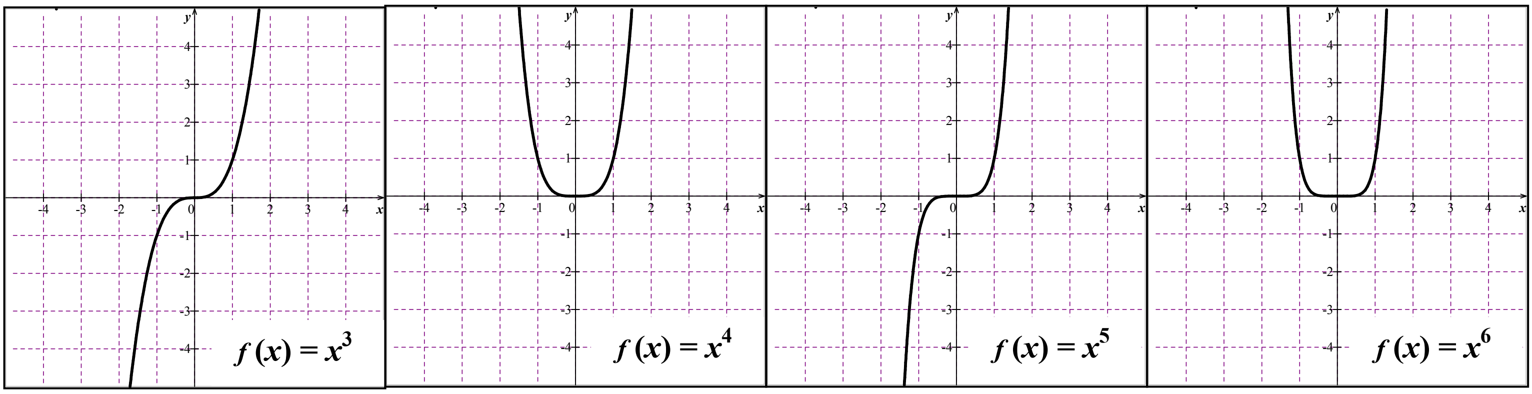
Lorsque x s'approche de 0, les valeurs de $f(x)$ augmentent très rapidement.

Vocabulaire : On dit que la fonction $f \;:\; x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour limite $+\infty$ en 0 sur $]0,+\infty[$.

Notation : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$, on note aussi : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Autres exemples :

▶1. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

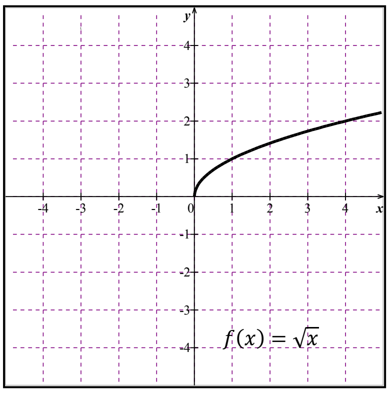


Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

Si n est impair $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

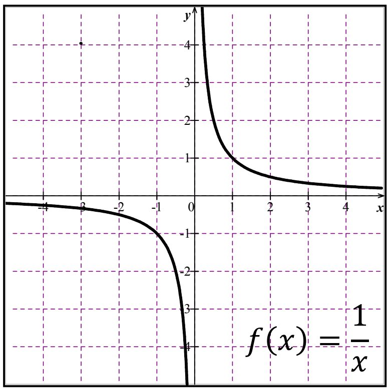
Si n est pair $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$

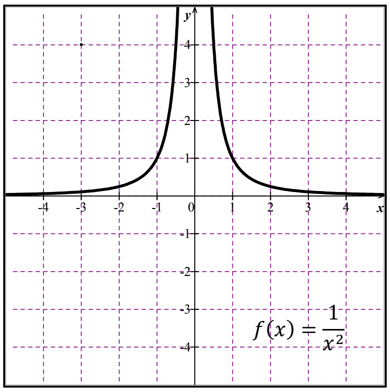
▶2. Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $f : x \mapsto \sqrt{x}$,

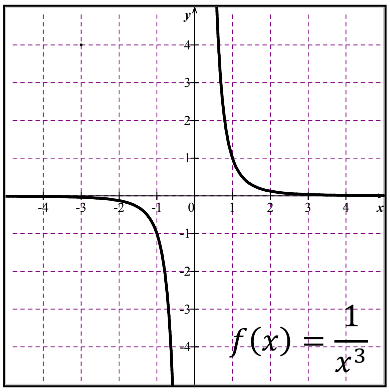


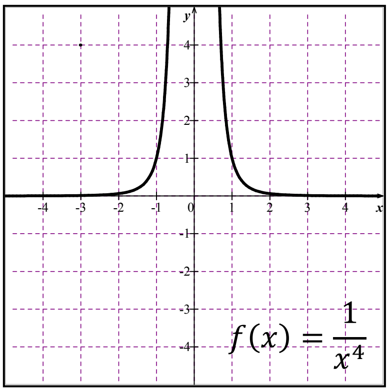
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

► 3. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$







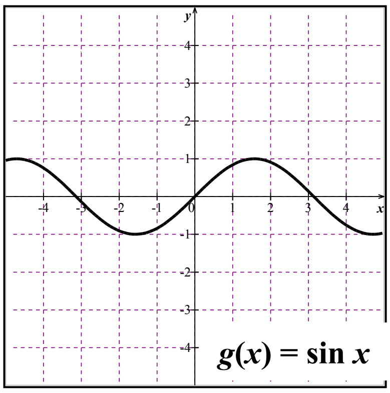


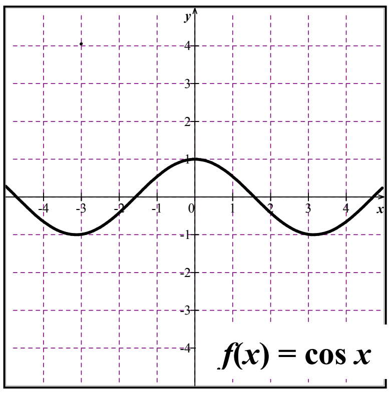
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Si n est pair alors $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

Si n est impair alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$

► 4. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \sin x$





Les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite ni en $-\infty$, ni en $+\infty$.

II. Opérations sur les limites

$a\in\mathbb{R}$ ou $a=+\infty$ ou $a=-\infty$, $L\in\mathbb{R}$

Somme de fonctions.

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} v(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to a}[u(x)+v(x)]$	L+L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée	$-\infty$

Produit de fonctions.

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)$	L	$L\neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} v(x)$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a}[u(x)\times v(x)]$	L×L'	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes	Forme indéterminée	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes

Inverse d'une fonction.

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)$	$L\neq 0$	0^-	0^+	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{u(x)}$	$\frac{1}{L}$	$-\infty$	$+\infty$	0^+	0^-

Quotient de fonctions.

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)$	L	$L\neq 0$	L	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} v(x)$	$L'\neq 0$	0^+ ou 0^-	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	L'
alors $\lim\limits_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{L}{L'}$	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes	0	Forme indéterminée		$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes

Exemple.

▶1. $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+\frac{1}{x}=+\infty$

▶2. $f(x)=(-x+7)\sqrt{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}-x+7=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+7)\sqrt{x}=-\infty$

▶3. $f(x)=\frac{1}{x-5}$ sur $]5,+\infty[$, $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}}x-5=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to5^+}\frac{1}{x-5}=+\infty$

▶4. $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$ sur $]-1,+\infty[$, $\lim\limits_{x\to-1^+}x+1=0^+$et $\lim\limits_{x\to-1^+}2x+3=-5$donc $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{2x-3}{x+1}=-\infty$

Exemples de forme indéterminées.

▶1.$f(x)=x^2+4x$ sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}4x=-\infty$, la forme est donc indéterminée.

Lorsqu'on a une forme indéterminée, on transforme l'écriture de la fonction pour lever l'indétermination.

$f(x)=x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)=1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+4x=+\infty$

▶2.$g(x)=\frac{2x-3}{x+1}$ sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty}2x-3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x+1=+\infty$, la forme est donc indéterminée.

$g(x) = \frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{3}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-3}{x+1} = \frac{2}{1} = 2$

Théorème de Composition des fonctions.

Soit u et v deux fonctions et $\boldsymbol{w}$: $\boldsymbol{x \mapsto v \circ u(x)}$

Si $\lim\limits_{x\to a} \boldsymbol{u(x) = b}$ et $\lim\limits_{y\to b} \boldsymbol{v(y)} = \mathbf{L}$ alors $\lim\limits_{x\to a} \boldsymbol{w(x)} = \mathbf{L}$

Théorème des gendarmes. Si $\boldsymbol{u(x) \leq f(x) \leq v(x)}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{u(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{v(x)} = \mathbf{L}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x)} = \mathbf{L}$.

Exemple.

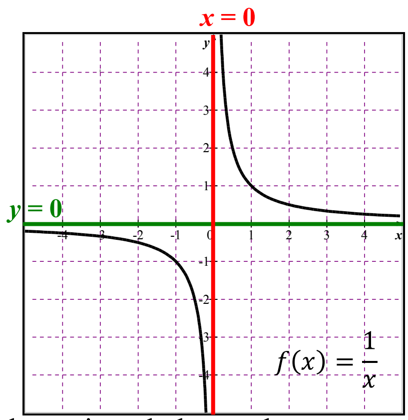
$f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$ sur $]0,+\infty[$, pour tout x $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $\frac{-1}{x^2} \leq \frac{\cos x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$.

Théorème. Si $\boldsymbol{u(x) \leq f(x)}$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{u(x)} = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

III. Les asymptotes

Le terme « asymptote » signifie que la courbe représentative de la fonction se rapproche indéfiniment d'une autre courbe en un point ou en l'infini sans jamais la couper.



Exemple. La fonction inverse $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{x \mapsto \frac{1}{x}}$

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proche de 0, les points de la courbe représentative de f sont de plus en plus proches de l'axe des ordonnées.

Vocabulaire. On dit que l'axe des ordonnées, d'équation $x = 0$, est une **asymptote verticale** de la courbe de f.

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes en valeur absolue, les points de la courbe représentative de f sont de plus en plus proches de l'axe des abscisses.

Vocabulaire. On dit que l'axe des abscisses, d'équation $y = 0$, est une **asymptote horizontale** de la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Propriété. Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} \boldsymbol{f(x)} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} \boldsymbol{f(x)} = -\infty$, alors la courbe représentative de f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = a$.

Propriété. Soit f une fonction, si $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x)} = \mathbf{L}$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f(x)} = \mathbf{L}$ alors la courbe représentative de f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = \text{L}$.

Propriété. Soit f une fonction, si $\lim\limits_{x\to+\infty} [\boldsymbol{f(x) - (ax+b)}] = \mathbf{0}$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} [\boldsymbol{f(x) - (ax+b)}] = \mathbf{0}$ alors la courbe représentative de f admet une **asymptote oblique** d'équation $y = ax + b$.

Exemple. Asymptote oblique

$f(x) = \frac{x^2-2x-2}{x-2}$, on écrit f sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

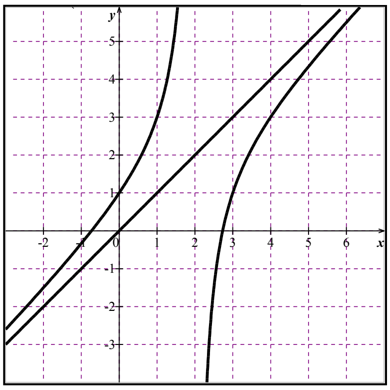
$$ax+b+\frac{c}{x-2}=\frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}=\frac{ax^2+(-2a+b)x-2b+c}{x-2}$$

donc $\begin{cases}a=1\\-2a+b=-2\\-2b+c=-2\end{cases}$ soit $\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-2\end{cases}$

Donc $f(x)=x+\frac{-2}{x-2}$ d'où $f(x)-x=\frac{-2}{x-2}$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x-2}=0$

Donc la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = x$.

$y = x$



$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^2-2x-2}{x-2}}$$