Corrections d'exercices sur les limites

Exercice 1P194
Pour cet exercice je connais les limites des puissances de x aux bornes de leurs intervalles de définition, ici ces puissances sont multipliées par des réels, donc je vais utiliser le tableau du cours :

Produit de fonctions.

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)$	L	$L \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} v(x)$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a}[u(x)\times v(x)]$	L×L'	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes	Forme indéterminée	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes

Plus précisément la colonne en rouge, u(x) sera ma fonction constante égale au nombre qui multiplie v(x) la puissance de x
a) $u(x) = -1$ et $v(x) = x^2$ en $+\infty$ comme en $-\infty$ la limite de u(x) est -1 et celle de v(x) est $+\infty$ donc
$\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2 = \lim\limits_{x\to-\infty}[u(x)\times v(x)] = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty}[u(x)\times v(x)] = -\infty$
b) $u(x) = \frac{-1}{2}$ et $v(x) = x^3$ en $+\infty$ comme en $-\infty$ la limite de u(x) est -1/2 de plus $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{2}x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{2}x^3 = -\infty$
c) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^4 = +\infty$
d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2}{x} = 0$ (j'ai utilisé la colonne verte) et $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{-2}{x} = +\infty$
e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-6}{x} = 0$ (j'ai utilisé la colonne verte) et $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{-6}{x} = -\infty$

Exercice 2 P194
a) $f(0) = 0\sqrt{0}$ donc $\lim\limits_{x\to0} x\sqrt{x} = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x} = +\infty$
b) ici -1 est divisé par $\sqrt{x}$ on utilisera alors un autre tableau du cours :
Quotient de fonctions.

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)$	L	$L\neq0$	L	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} v(x)$	$L'\neq0$	0^+ ou 0^-	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	L'
alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{L}{L'}$	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes	0	Forme indéterminée		$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes

Ici on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0^+$ donc d'après la colonne rouge on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}} = 0^-$ et d'après la colonne verte on aura : $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}} = -\infty$

Exercice 3 P194
$f(x) = x^2-2x+3$ est définie sur ℝ donc en -1 et en 3
$f(-1) = (-1)^2-2(-1)+3 = 1+2+3 = 6$
$f(3) = 3^2-2\times3 +3 = 6$
Nous aurons donc $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = f(-1) = 6$ et $\lim\limits_{x\to3} f(x) = f(3) = 6$

Exercice 4 P194
-1, 0 et 0,5 sont tous les trois dans l'ensemble de définition donc les limites de f en ces valeurs sont égales aux images respectives de ces dernières par f.
$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = f(-1) = 0{,}5$; $\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to0{,}5} f(x) = f(0) = -4$

Exercice 5 P195
1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$
Si l'on regarde la case du tableau limite d'une somme de fonctions correspondant à notre situation nous pouvons lire « forme indéterminée » ce qui veut dire que le tableau manque d'information pour pouvoir donner une réponse sure, il nous faut donc creuser la question.
2) $x^3\left(1-\frac{1}{x}\right) = x^3 - \frac{x^3}{x} = x^3 - x^2 = f(x)$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{1}{x}\right) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Cette méthode est fondamentale !!!!
Quand on étudie la limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ si l'on tombe sur une forme indéterminée il suffit de factoriser par rapport au terme de plus haut degrés, on obtient ainsi un produit dont un élément (le terme de plus haut degrés) tendra vers plus ou moins l'infini et dont l'autre terme tendra vers une valeur finie.

Exercice 6 P195

a) $f(x) = -3x^2 + 4x + 1 = x^2\left(-3 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = -3$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = -3$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b) $f(x) = -x^3 + x + 1 = x^3\left(-1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

c) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1 = x^4\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 7 P 195

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x + 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - 1) = +\infty$

Si l'on regarde la case du tableau limite d'un quotient de fonctions correspondant à notre situation nous pouvons lire « forme indéterminée » ce qui veut dire que le tableau manque d'information pour pouvoir donner une réponse sure, il nous faut donc creuser la question.

$(3x + 1) = 3x\left(1 - \frac{1}{3x}\right)$ et $(x - 1) = x\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ donc

$f(x) = \frac{(3x+1)}{(x-1)} = \frac{3x\left(1-\frac{1}{3x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{3\left(1-\frac{1}{3x}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$ CQFD

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{3x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\left(1-\frac{1}{3x}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 3$

2) $3x^2\left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{3x^2}\right) = 3x^2 + 2x + 1$ et $x\left(1 - \frac{2}{x}\right) = x - 2$ donc

$g(x) = \frac{3x^2+2x+1}{x-2} = \frac{3x^2\left(1-\frac{2}{3x}+\frac{1}{3x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = 3x\frac{\left(1-\frac{2}{3x}+\frac{1}{3x^2}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}\right)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{3x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{3x}+\frac{1}{3x^2}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}\right)} = 1$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

3) $-2x\left(1 - \frac{1}{2x}\right) = -2x + 1$ et $3x^2\left(1 + \frac{2}{3x} - \frac{1}{3x^2}\right) = 3x^2 + 2x - 1$

Donc $h(x) = \frac{-2x+1}{3x^2+2x-1} = \frac{-2x\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{3x^2\left(1+\frac{2}{3x}-\frac{1}{3x^2}\right)} = \frac{-2}{3x} \times \frac{\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{\left(1+\frac{2}{3x}-\frac{1}{3x^2}\right)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{3x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{\left(1+\frac{2}{3x}-\frac{1}{3x^2}\right)} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{3x} \times \frac{\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{\left(1+\frac{2}{3x}-\frac{1}{3x^2}\right)} = 0^+$

Exercice 8 P196

1) a) $\lim\limits_{x\to3}(x - 3) = 0$ sur l'intervalle $]3; +\infty[$ x-3 est positif donc sur $]3; +\infty[$ on a :

$\lim\limits_{x\to3}(x - 3) = \lim\limits_{x\to3^+}(x - 3) = 0^+$ et donc $\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{(x-3)} = \lim\limits_{x\to3^+}\frac{1}{(x-3)} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to3}(-x + 2) = -1$

c) $\lim\limits_{x\to3} f(x) = \lim\limits_{x\to3}(-x + 2)\frac{1}{(x-3)} = -\infty$

attention lorsque le domaine définition de f est $]3; +\infty[$ si on parle de la limite de f en 3 on parle nécessairement de la limite à droite ou encore de la limite en 3^+ donc les notations $\lim\limits_{x\to3}$, $\lim\limits_{x\to3^+}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}}$ sont équivalentes. Ce ne serait pas le cas si le domaine de définition était $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$, la limite à droite et la limite à gauche n'ont pas nécessairement la même valeur, donc les notations $\lim\limits_{x\to3^+}$ et $\lim\limits_{x\to3^-}$ (ou encore $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}}$) ne sont pas interchangeables.

2) $\frac{-2x+1}{(x-1)(3x+1)}=\frac{-2x+1}{3x^2-2x-1}=g(x)$ cqfd
x-1 est négatif pour tous les x plus petits que 1 et positif pour tous les x supérieurs à 1.
$\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} x-1=0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} \frac{1}{(x-1)}=-\infty$ de plus $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} -2x+1=-1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} \frac{1}{(3x+1)}=\frac{1}{4}$
Donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} \frac{-2x+1}{(3x+1)}=\frac{-1}{4}$ et on peut conclure que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} \frac{1}{(x-1)}\frac{-2x+1}{(3x+1)}=+\infty$

Exercice 9 P196
a) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} x-1=0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{1}{x-1}=+\infty$ de plus $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} -4x=-4$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{-4x}{x-1}=-\infty$
bonus : limite en $+\infty$ $f(x)=-\frac{4x}{x-1}=-\frac{4x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=-4\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-4$

b) $f(x)=\frac{1-2x}{1-x^2}=\frac{1-2x}{(1-x)(1+x)}$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} 1-x=0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{1}{1-x}=-\infty$ de plus $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{1-2x}{(1+x)}=\frac{-1}{2}$
donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{1-2x}{(1-x)(1+x)}=+\infty$
c) $f(x)=-\frac{2x}{(x-1)^2}$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} x-1=0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} (x-1)^2=0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$ de plus $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} -2x=-2$
donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}=-\frac{2x}{(x-1)^2}=-\infty$

Exercice 13 P196
On recherche des asymptotes parallèles aux axes des coordonnées donc on s'intéresse à des asymptotes verticales (limite infinie en un x fini) et horizontales (limites finies pour x infini)
a)
si il y une asymptote verticale c'est nécessairement en $\frac{3}{2}$
$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3}{2}\\>}} f(x)=+\infty$ donc on a une asymptote verticale d'équation $x=\frac{3}{2}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{2}$ donc on a une asymptote horizontale d'équation $y=\frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ donc on a une asymptote horizontale d'équation y = 0
c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$ donc on a une asymptote horizontale d'équation y = 3

Remarque : en contrôle on doit marquer le détail de la recherche des limites, ici je ne l'ai pas fait. Si vous avez un doute sur la méthode vous pouvez vous reporter aux exercices 7 et 8 qui donnent le détail de la rédaction

Exercice 14 P196
1)
$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} x+1=0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} \frac{1}{x+1}=+\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} \frac{2}{x+1}=+\infty$ de plus $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} x+3=2$
Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} x+3+\frac{2}{x+1}=+\infty$
Il y a donc une asymptote verticale d'équation x = -1
2)
$\lim\limits_{x\to+\infty} x+3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x+1}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x+3+\frac{2}{x+1}=+\infty$
3)
$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(x+3)]=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x+1}=0$ nous pouvons en déduire que y=(x+3) est une asymptote oblique de C_f en $+\infty$

Exercice 15 P196
1)
$ax+b+\frac{c}{x-1}=\frac{(ax+b)(x-1)}{x-1}+\frac{c}{x-1}=\frac{ax^2-ax+bx-b+c}{x-1}$
Donc $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}\Leftrightarrow\frac{x^2+3x+1}{x-1}=ax+b+\frac{c}{x-1}\Leftrightarrow\frac{x^2+3x+1}{x-1}=\frac{ax^2-ax+bx-b+c}{x-1}\Leftrightarrow x^2+3x+1=ax^2-ax+bx-b+c$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a = 1 \\ -a + b = 3 \\ -b + c = 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ -b + c = 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 5 \end{cases}$$

Ainsi $f(x) = x + 4 + \frac{5}{x-1}$

2)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x+4)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x-1} = 0$ nous pouvons en déduire que y=(x+4) est une asymptote oblique de C_f en $+\infty$

3)

$f(x) - (x+4) = \frac{5}{x-1}$ or sur]1 ;+ ∞[x-1 >0 donc $\frac{5}{x-1}$ aussi donc $f(x) - (x+4) > 0$ donc C_f est au dessus le la droite d'équation y=x+4

4)

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} x - 1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{1}{x-1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{5}{x-1} = +\infty$ de plus $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} x + 4 = 5$

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} x + 4 + \frac{5}{x-1} = +\infty$

Il y a donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$

Exercices 16,17,18,19 P 197

	16	17	18	19
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	2	$+\infty$	0	0

16 f est croissante de 0 à 3 puis décroissante de 3 à $+\infty$ 4 est le maximum de f atteint pour $x = 3$

17 f est décroissante de 0 à 2 puis croissante de 2 à $+\infty$ 3 est le minimum de f atteint pour $x = 2$

18 f est décroissante de 0 à $+\infty$

19 f est décroissante de 0 à 3 puis croissante de 3 à $+\infty$ -2 est le minimum de f atteint pour $x = 3$

Exercice 41 P200

1)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

2)

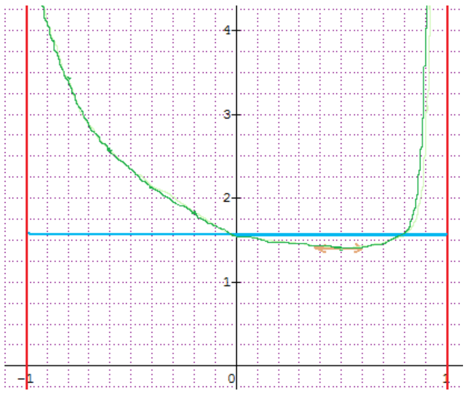
f est croissante de $-\infty$ (elle tends vers -1) à -1 (elle atteint 5), puis décroissante de -1 à 4 (elle atteint -2) puis elle est croissante jusqu'en $+\infty$ (elle tends vers -1)

3)

Pour résoudre graphiquement l'inéquation f(x)≤0 je regarde pour quels x est ce que f(x) est sous l'axe des abscisses en l'occurrence je peux lire :

$S = \left]-\infty; \frac{-7}{2}\right] \cup [2; +\infty[$

Exercice 44 P201



1)a) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = +\infty$ b) $\lim\limits_{\substack{x\to+1\\<}} f(x) = +\infty$

c) nous aurons donc deux asymptotes verticales d'équation x= -1 et x = 1

2)

3) grâce au tableau de variation et au tableau de valeur on sait que de 0 à 0,8 f a ses valeurs inférieures ou égales à 1,6

Donc S = [0 ; 0,8]