Nom & Prénom : ……………………………………………………….. www.dimension-k.com

DS 3 : Etudes de fonctions &cie

Exercice 1

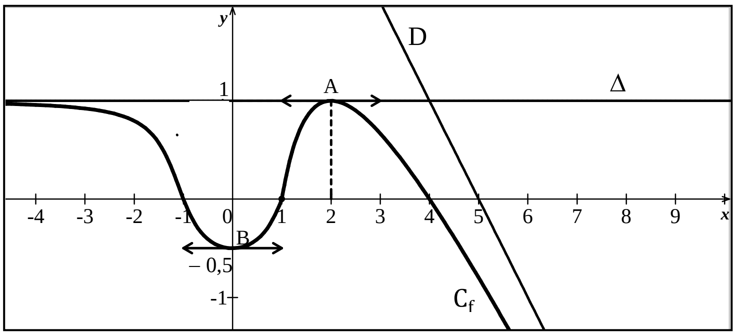
Dire des fonctions suivantes si elles sont paires, impaires, périodiques (et dans ce cas quelle est leur période)

a) $f(x) = 5x + 7$ b) $g(x) = 5x^2+7$ c) $h(x) = 5x^3+7x$

d) $i(x) = 5 + \cos(7x)$ e) $j(x) = \sin(5x+7)$

Exercice 2

On donne la courbe représentative C_f de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dans le plan muni d'un repère orthogonal. Les droites Δ et D sont des asymptotes de la courbe c. Les tangentes à C_f en A et B sont parallèles à l'axe des abscisses.



1. Déterminer graphiquement :

a) f (2) et f '(2)

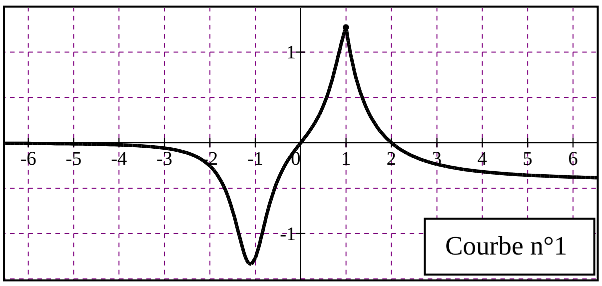
b) f (0) et f '(0)

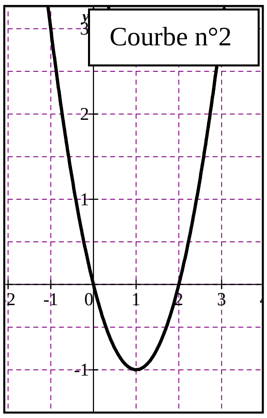
c) les solutions de l'équation f (x) = 0.

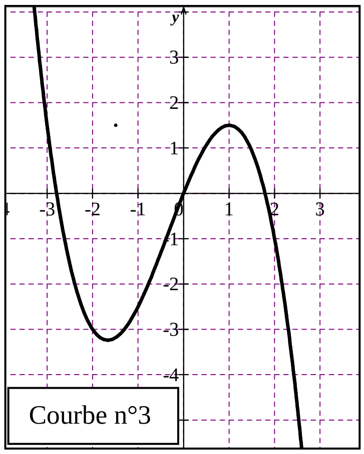
d) les solutions de l'inéquation f '(x) ≤ 0.

2. Donner le tableau de variation de f.
(On fera figurer une ligne pour la dérivée f ')

3. En justifiant, déterminer parmi les trois courbes suivantes celle qui peut représenter la fonction f ' dérivée de la fonction f.







Exercice 3

Soit f la fonction définie sur par $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5$

1) Etudiez le sens de variation de f
2) Vérifiez que l'équation $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5 = 0$ admet une seule solution sur l'intervalle [-1 ;0]
3) Déterminez trois réels a,b,c tels que $f(x) = (x-1)^2(ax^2+bx+c)$
4) En déduire les solutions de l'équation $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5 = 0$

Correction :

Exercice 1

Dire des fonctions suivantes si elles sont paires, impaires, périodiques (et dans ce cas quelle est leur période)

a) $f(x) = 5x + 7$ elle n'a aucune particularité

b) $g(x) = 5x^2+7$ $g(-x) = 5(-x)^2+7 = 5x^2+7 = g(x)$ la fonction est paire

c) $h(x) = 5x^3 - 7x$ $h(-x) = 5(-x)^3-7(-x) = -5x^3 + 7x = -h(x)$ la fonction est donc impaire

d) $i(x) = 5 + \cos(7x)$ $i(-x) = 5 + \cos(-7x) = 5 + \cos(7x)=i(x)$ la fonction est paire

$i(x+\frac{2\pi}{7}) = 5 + \cos\left(7\left(\frac{2\pi}{7} + x\right)\right) = 5 + \cos(7x + 2\pi) = 5 + \cos(7x) = i(x)$ donc i est $\frac{2\pi}{5}$ périodique.

e) $j(x) = \sin(5x+7)$

$j\left(\frac{2\pi}{5} + x\right) = \sin\left(5\left(\frac{2\pi}{5} + x\right) + 7\right) = \sin(5x + 7 + 2\pi) = \sin(5x + 7) = j(x)$ donc j est $\frac{2\pi}{5}$ périodique.

Exercice 2

1 *a*) $f(2) = 1$ et $f'(2) = 0$

b) $f(0) = -0{,}5$ et $f'(0) = 0$

c) L'équation $f(x) = 0$ a pour solutions $\{-1;1;4\}$.

d) L'inéquation $f'(x) \leq 0$ a pour solutions $]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$.

2.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-0{,}5$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

3. La courbe n°2 ne peut pas représenter la dérivée de *f* car elle est négative sur [0,2].
La courbe n°3 ne peut pas représenter la dérivée de *f* car elle ne vaut pas 0 en 2.
Seule la courbe n°3 peut représenter la dérivée de *f*.

Exercice 3

1) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5$
$f'(x)= 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x^2 + x - 2)$
$\Delta= 1 + 8 = 9$ donc $x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$
Donc $f'(x) = 12x(x+2)(x-1)$

2) $f(-1) = -8$ et $f(0) = 5$, $0 \in [-8; 5]$ et f est strictement croissante sur [-1 ;0] donc il n'y aura qu'une solution x_0 à l'équation $f(x) = 0$ sur [-1 ;0].
on lit $-0{,}62\leq x_0 \leq -0{,}61$

3) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5 = (x-1)^2(ax^2 + bx + c)$

$$\begin{aligned}(x-1)^2(ax^2 + bx + c) &= (x^2 - 2x + 1)(ax^2 + bx + c)\\ &= ax^4 + bx^3 + cx^2 - 2ax^3 - 2bx^2 - 2xc + ax^2 + bx + c\\ &= ax^4 + (b-2a)x^3 + (c-2b+a)x^2 + (b-2c)x + c\end{aligned}$$

Donc $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5 = (x-1)^2(ax^2 + bx + c)$
$\Leftrightarrow 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5 = ax^4 + (b-2a)x^3 + (c-2b+a)x^2 + (b-2c)x + c$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ (b-2a)=4 \\ (c-2b+a)=-12 \\ (b-2c)=0 \\ c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ (b-6)=4 \\ (c-2b+a)=-12 \\ (b-10)=0 \\ c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b=10 \\ (5-20+3)=-12 \\ b=10 \\ c=5 \end{cases}$$

Ainsi : $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5 = (x-1)^2(3x^2 + 10x + 5)$

4)Recherchons les solutions de $3x^2 + 10x + 5 = 0$ $\Delta= 100 - 60 = 40$
donc $x_1 = \frac{-10-2\sqrt{10}}{6} = \frac{-5-\sqrt{10}}{3}$ et $x_2 = \frac{-10+2\sqrt{10}}{6} = \frac{-5+\sqrt{10}}{3}$
les solutions de l'équation $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5 = 0$ sont celles de $(x-1)^2(3x^2 + 10x + 5)=0$, elle sont donc $x_0 = 1, x_1 = \frac{-5-\sqrt{10}}{3}$ et $x_2 = \frac{-5+\sqrt{10}}{3}$