Entrainement au calcul de limites

Soit f la fonction qui à x associe le réel $\frac{7x-5}{x+3}$
1) Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f
2) Calculez les limites aux bornes de D_f
3) En déduire les asymptotes de C_f la courbe représentative de f

Correction :
1) $D_f =]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[=\mathbb{R}\backslash\{-3\}$
2) Il va falloir étudier les limites de f en $-\infty; -3^-; -3^+$ $et\ en + \infty$
$f(x)=\frac{7x-5}{x+3}=\frac{x\left(7-\frac{5}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\frac{\left(7-\frac{5}{x}\right)}{\left(1+\frac{3}{x}\right)}$ donc $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=7$
$\left.\begin{matrix}\lim_{x\to-3^-} x+3=0^- \\ \lim_{x\to-3^-} 7x-5=-26\end{matrix}\right\}$ $donc\ \lim_{x\to-3^-} f(x)=+\infty$
$\lim_{x\to-3^+} x+3=0^+$ et $\lim_{x\to-3^+} 7x-5=-26$ donc $\lim_{x\to-3^+} f(x)=-\infty$
3) Nous aurons donc :
une asymptote horizontale d'équation y=7 et
une asymptote verticale d'équation x=-3

Soit g la fonction qui à x associe le réel $\frac{x^3-5}{x^2+3x-10}$
1) Déterminer D_g le domaine de définition de la fonction g
2) Calculez les limites aux bornes de D_g
3) déterminer a, b, c et d tels que $g(x)=ax+b+\frac{cx+d}{x^2+3x-10}$
4) En déduire les asymptotes de C_g la courbe représentative de g

Correction :
1) Pour déterminer l'ensemble de définition de la fonction g je dois savoir quand est ce que le polynôme au dénominateur s'annule.
$\Delta=9-(-4)\times 10=49=7^2$ et donc $x_1=\frac{-3-7}{2}=-5$ et $x_2=\frac{-3+7}{2}=2$
donc $x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$
ainsi $D_g=]-\infty;-5[\cup]-5;2[\cup]2;+\infty[=\mathbb{R}\backslash\{-5;2\}$
2) Il va falloir étudier les limites de f en $-\infty; -5^-; -5^+; 2^-; 2^+$ $et\ en + \infty$
$\frac{x^3-5}{x^2+3x-10}=\frac{x^3\left(1-\frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}\right)}=x\frac{\left(1-\frac{5}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}\right)}$ on a $\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1-\frac{5}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{5}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}\right)}=1$
De plus $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ donc
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$g(x)=\frac{x^3-5}{(x-2)(x+5)}=\frac{1}{(x+5)}\times\frac{x^3-5}{(x-2)}$

$\lim\limits_{x\to-5^-}(x+5)=0^-$ donc $\lim\limits_{x\to-5^-}\frac{1}{(x+5)}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-5^-}\frac{x^3-5}{(x-2)}=\frac{-130}{-7}$ conclusion $\lim\limits_{x\to-5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-5^-}\frac{1}{(x+5)}\times\frac{x^3-5}{(x-2)}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-5^+}(x+5)=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to-5^+}\frac{1}{(x+5)}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-5^+}\frac{x^3-5}{(x-2)}=\frac{-130}{-7}$ conclusion $\lim\limits_{x\to-5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-5^+}\frac{1}{(x+5)}\times\frac{x^3-5}{(x-2)}=+\infty$

$g(x)=\frac{x^3-5}{(x-2)(x+5)}=\frac{1}{(x-2)}\times\frac{x^3-5}{(x+5)}$

$\lim\limits_{x\to2^-}(x-2)=0^-$ donc $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{1}{(x-2)}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x^3-5}{(x+5)}=\frac{3}{7}$ conclusion $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{1}{(x-2)}\times\frac{x^3-5}{(x+5)}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{(x-2)}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x^3-5}{(x+5)}=\frac{3}{7}$ conclusion $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{(x-2)}\times\frac{x^3-5}{(x+5)}=+\infty$

3) soient a, b, c et d tels que $g(x)=ax+b+\frac{cx+d}{x^2+3x-10}$ donc g(x) $=\frac{(ax+b)(x^2+3x-10)+cx+d}{x^2+3x-10}=\frac{ax^3+(b+3a)x^2+(3b-10a+c)x+(d-10)}{x^2+3x-10}$
Or $g(x)=\frac{x^3-5}{x^2+3x-10}$ donc on aura : $\begin{cases}a=1\\ b+3a=0\\ 3b-10a+c=0\\ d-10b=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-3\\ 3b-10a+c=0\\ d=-35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-3\\ c=19\\ d=-35\end{cases}$
Ainsi $g(x)=x-3+\frac{19x-35}{x^2+3x-10}$ donc $\lim_{x\to-\infty}[g(x)-(x-3)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{19x-35}{x^2+3x-10}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left(19-\frac{35}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\frac{\left(19-\frac{35}{x}\right)}{\left(1+\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}\right)}=0$
De la même manière on peut montrer que $\lim_{x\to+\infty}[g(x)-(x-3)]=0$ donc y = x – 3 sera une asymptote oblique pour la courbe C_g
Les droites d'équation x = 2 et x= -5 sont les équations des asymptotes verticales de la courbe.