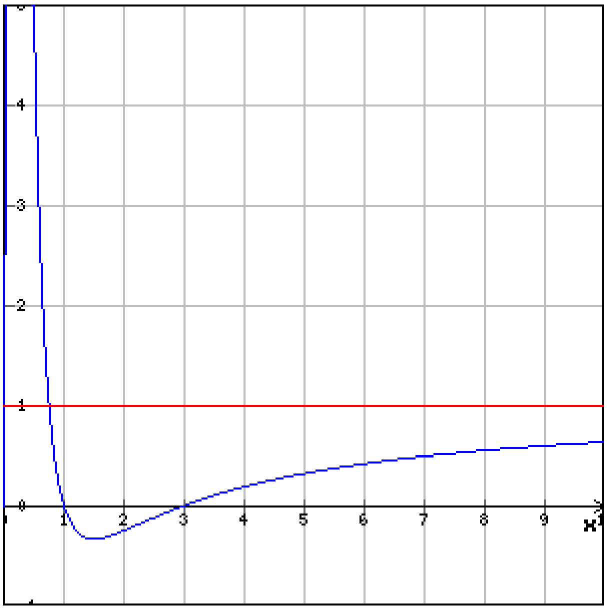
Nom & Prénom : ……………………………………………………………………. www.dimension-k.com

DS 4 : Limites de fonctions

Exercice 1

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ dont la représentation graphique C est donnée sur la figure ci-dessous.
On précise que la courbe C ne coupe l'axe des abscisses qu'en deux points et qu'elle admet l'axe des ordonnées et la droite Δ qui est parallèle à l'axe des abscisses comme asymptotes.



1/ A partir de cette représentation graphique, déterminer :
a) la limite de g(x) lorsque x tend vers $+\infty$.
b) la limite de g(x)lorsque x tend vers 0.

2/ Dresser un tableau donnant le signe de g(x) lorsque x décrit l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

3/ On admet que $g(x) = \frac{ax^2+b^2+c}{x^2}$ où a, b et c sont trois nombres réels.
à) En calculant la limite de $\frac{ax^2+b^2+c}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$, montrer que a=1.
b) Lire g(1) et g(3) sur le graphique et en déduire un système de deux équations permettant d'obtenir b et c.
c) Résoudre ce système et exprimer g(x) en remplaçant a, b et c par leurs valeurs.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]5\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{5-x}$
1) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition
2) Dressez la tableau de variation de f
3) Déterminer a,b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{5-x}$
4) En déduire l'équation de l'asymptote (justifiez votre réponse)

Exercices 3 : complexes, rotations

Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives : $z_A = 5e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_B = 5 - 5i$
Déterminer les affixes de A' et B' respectivement images de A et B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$

Exercice 4: déterminer les primitives de quelques fonctions de base

Soient f et g les deux fonctions définies par $f(x) = x^3 - \frac{4}{x^2}$ et par $g(x) = -3x^2 + 5x - \frac{3}{\sqrt{x}}$
1) Déterminer les ensembles de définition D_f et D_g des deux fonctions
2) Les fonctions sont elles dérivables sur leur ensemble de définition ?
3) Déterminer la forme générale des primitives de f et de g
4) Déterminer F et G primitives respectives de f et g telles que F(-2) = -3 et G(4) = 11

Nom & Prénom : …………………………………………………………………….. www.dimension-k.com

Correction

Exercice 1

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ dont la représentation graphique C est donnée sur la figure ci-dessous.
On précise que la courbe C ne coupe l'axe des abscisses qu'en deux points et qu'elle admet l'axe des ordonnées et la droite Δ qui est parallèle à l'axe des abscisses comme asymptotes.

1/ A partir de cette représentation graphique, on a :
a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x))=1$
b) $\lim\limits_{x\to 0}(g(x))=+\infty$

2/ Le signe de $g(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0;+\infty[$ est donné dans le tableau suivant :

x	0		1		3		$+\infty$
g(x)		+	0	-	0	+	

3/ On admet que $g(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2}$ où a, b et c sont trois nombres réels.
a) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x))=1$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2}\right)=a$ donc $a=1$.
b) $g(1)=0$ et $g(3)=0$ soit $g(1)=a+b+c=1+b+c$ et $g(3)=\dfrac{9a+3b+c}{9}$
on a donc le système $\begin{cases}b+c=-1\\3b+c=-9\end{cases}$
c) On a $\begin{cases}b=-1-c\\3(-1-c)+c=-9\end{cases}$ ssi $\begin{cases}b=-1-c\\-3-2c=-9\end{cases}$ ssi $\begin{cases}b=-1-c\\-2c=-6\end{cases}$ ssi $\begin{cases}c=3\\b=-4\end{cases}$
on a alors $g(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2}$

Exercice 2

1)

$\left.\begin{matrix}\lim_{x\to5^+} 5-x=0^-\\ \lim_{x\to5^+} x^2=25\end{matrix}\right\}$ $donc\ \lim_{x\to5^+} f(x)=-\infty$

$f(x)=\frac{x^2}{5-x}=\frac{x^2}{x\left(\frac{5}{x}-1\right)}=x\frac{1}{\left(\frac{5}{x}-1\right)}$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{5}{x}-1\right)}=-1$ et

$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2)

$f'(x)=\frac{(-1)x^2-(5-x)2x}{(5-x)^2}=\frac{-x^2-10x+2x^2}{(5-x)^2}=\frac{x^2-10x}{(5-x)^2}$

$=\frac{x(x-10)}{(5-x)^2}$ sur]5 ; +∞[x et $(5-x)^2$ sont positifs donc f' sera du signe de x-10 (qui est négatif sur]5 ; 10[nul en dix et positif sur]10 ; +∞[ )

Conclusion : f est croissante sur]5 ; 10] et décroissante sur [10 ; +∞[

3)

$ax+b+\frac{c}{5-x}=\frac{(ax+b)(5-x)+c}{5-x}=\frac{-ax^2+x(5a-b)+5b+c}{5-x}$

$f(x)=ax+b+\frac{c}{5-x}\Leftrightarrow\frac{x^2}{5-x}=\frac{-ax^2+x(5a-b)+5b+c}{5-x}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-a=1\\5a-b=0\\5b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\5a=b\\c=-5b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\-5=b\\c=25\end{cases}$

Donc $f(x)=-x-5+\frac{25}{5-x}$

4)

La droite d'équation y = -x-5 sera une équation de l'asymptote oblique à la courbe représentative de f car

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-x-5)=\lim\limits_{x\to+\infty} -x-5+\frac{25}{5-x}-(-x-5)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{25}{5-x}=0^-$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} 5-x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 25=25$)

Exercices 3 : complexes, rotations

$z_{A'}=z_Ae^{i\frac{\pi}{4}}=5e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{\pi}{4}}=5e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}=5e^{i\frac{5\pi}{12}}$

Pour $z_{B'}$ on a deux approches possibles $z_{B'}=z_Be^{i\frac{\pi}{4}}=(5-5i)\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)=5\frac{\sqrt2}{2}+i5\frac{\sqrt2}{2}-i5\frac{\sqrt2}{2}+5\frac{\sqrt2}{2}=5\sqrt2$

Ou encore $|z_B|=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt2$ et $\cos\theta=\frac{5}{5\sqrt2}=\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$, $\sin\theta=\frac{-5}{5\sqrt2}=\frac{-\sqrt2}{2}$ donc $\theta=-\frac{\pi}{4}$ et $z_B=5\sqrt2e^{i\frac{-\pi}{4}}$

Donc $z_{B'}=z_Be^{i\frac{\pi}{4}}=5\sqrt2e^{i\frac{-\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}}=5\sqrt2$

Exercice 4: déterminer les primitives de quelques fonctions de base

Soient f et g les deux fonctions définies par f(x) = $x^3-\frac{4}{x^2}$ et par g(x) = $-3x^2+5x-\frac{3}{\sqrt{x}}$

1) et 2)

$D_f=\mathbb{R}^*$ et $D_g=\mathbb{R}_+^*$, les fonctions sont dérivables sur leur ensemble de définition (car ce sont des sommes de fonctions dérivables sur ces ensembles)

3) F(x) $=\frac{x^4}{4}+\frac{4}{x}+c$ et G(x) $=-x^3+\frac{5x^2}{2}-3\times2\sqrt{x}+c'=-x^3+\frac{5x^2}{2}-6\sqrt{x}+c'$

4) on veut que F(-2) = -3 or F(-2) $=\frac{(-2)^4}{4}+\frac{4}{-2}+c=4-2+c=2+c$ donc on a : $2+c=-3$ donc c=-5

Ainsi : F(x) $=\frac{x^4}{4}+\frac{4}{x}-5$

On veut que G(4) = 11 or G(4)$=-4^3+\frac{5\times4^2}{2}-6\sqrt4+c'=-64+40-12+c'=-36+c'$ donc $11=-36+c'$

et donc c' = 47 et on peut conclure que $G(x)=-x^3+\frac{5x^2}{2}-6\sqrt{x}+47$