Chap 4. Etude de fonctions, dérivation

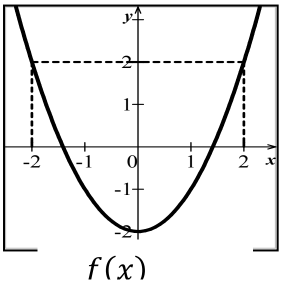
I. Généralités sur les fonctions

Définition. Le **domaine de définition** d'une fonction est l'ensemble des nombres réels x pour lesquels l'image $f(x)$ existe. On le note D_f.

Méthode.
- s'il y a des quotients, on résout dénominateur = 0 pour trouver les valeurs interdites.
- s'il y a des racines carrées, on résout radical ≥ 0.

Définition. Une fonction f est dite **paire** lorsque pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

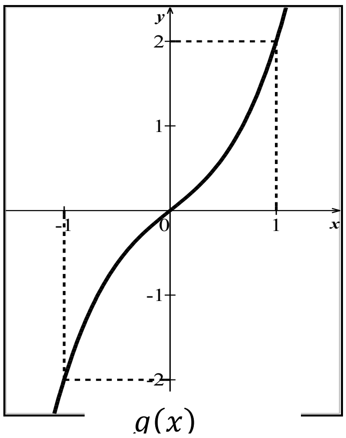
Propriété. Si la fonction f est paire alors sa courbe C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Exemple.
La fonction $f\ :\ x \mapsto f(x) = x^2 - 2$ est-elle paire ?
On calcule $f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x)$, la fonction f est paire.

Définition. Une fonction f est dite **impaire** lorsque pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

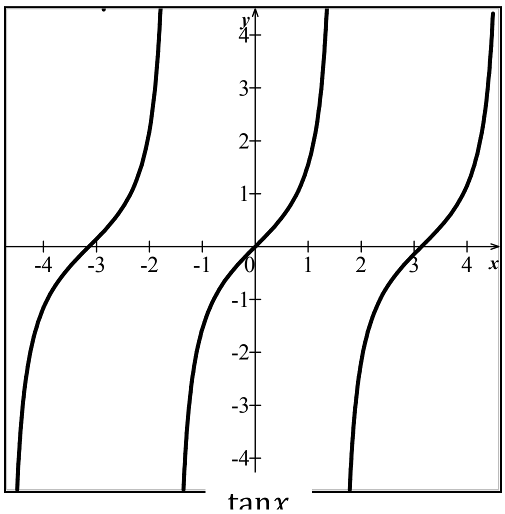
Propriété. Si la fonction f est impaire alors sa courbe C_f est symétrique par rapport à l'origine.



Exemple.
La fonction $g\ :\ x \mapsto g(x) = x^3 + x$ est-elle impaire ?
On calcule $g(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -g(x)$, la fonction g est impaire.

Définition. Une fonction est dite **T−périodique** lorsque pour tout $x \in D_f$, $x + T \in D_f$, et $f(x + T) = f(x)$.
T s'appelle la **période.**

Propriété. Si la fonction f est T−périodique alors on construit la courbe sur un intervalle de longueur T puis on translate cette courbe.



Exemple.
La fonction tan $:\ x \mapsto \tan x$ est-elle périodique ?

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

La fonction tan $:\ x \mapsto \tan x$ est π−périodique.

II. Variations d'une fonction

Pour déterminer les variations d'une fonction *f*, on calcule sa dérivée $f' = \frac{df}{dx}$ puis on étudie le signe de la dérivée.

Règles de base de la dérivation.

▶1. Les constantes. La dérivée d'une constante est nulle.
$f(x) = 5$, $f'(x) = 0$ car $(k)' = 0$ avec $k = 5$.

▶2. Les fonctions polynômiales.
$g(x) = x$, $g'(x) = 1$ car $(x)' = 1$
$h(x) = x^3$, $h'(x) = 3x^2$ car $(x^n)' = nx^{n-1}$
$k(x) = x^2 + x$, $k'(x) = 2x + 1$ car $(u + v)' = u' + v'$ avec $u = x^2$ et $v = x$.
$l(x) = 4x^6$, $l'(x) = 4 \times 6x^5 = 24x^5$ car $(ku)' = k \times u'$ avec $u = x^6$ et $k = 4$.

▶3. Les produits de fonctions.
$m(x) = x^2 \times (3x + 4)$, $m'(x) = 2x \times (3x + 4) + x^2 \times 3 = 9x^2 + 8x$ car $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$ avec $u = x^2$ et $v = 3x + 4$.

▶4. Les quotients de fonctions.
$p(x) = \frac{1}{x}$, $p'(x) = \frac{-1}{x^2}$ car $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$
$q(x) = \frac{5}{x^3} + 1$, $q(x) = \frac{-15}{x^4}$ car $\left(\frac{1}{x^n}\right)' \frac{-n}{x^{n+1}}$
$r(x) = \frac{1}{x^2+2x}$, $r'(x) = -\frac{2x+2}{(x^2+2x)^2}$ car $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$ avec $u = x^2 + 2x$
$t(x) = \frac{4x+1}{3x-2}$, $t'(x) = \frac{4(3x-2)-(4x+1)\times 3}{(3x-2)^2} = \frac{12x-8-12x-3}{(3x-2)^2} = \frac{-11}{(3x-2)^2}$ car $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u = 4x + 1$ et $v = 3x - 2$.

▶5. La racine carrée.
$w(x) = \sqrt{x}$, $w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ car $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

▶6. Les fonctions circulaires.
$a(x) = \sin x$, $a'(x) = \cos x$ car $(\sin x)' = \cos x$
$b(x) = \cos x$, $b'(x) = -\sin x$ car $(\cos x)' = -\sin x$

Rappel de notation.
On dit que l'on compose deux fonctions lorsque l'on applique deux fonctions l'une après l'autre :
Par exemple $f(x) = \sin x$ et $g(y) = y^2$, $g \circ f(x) = g[f(x)] = g[\sin x] = (\sin x)^2$.

Théorème. Dérivée des fonctions composées.

$$v \circ u(a) = v[u(a)] \qquad a \overset{u}{\mapsto} u(a) \overset{v}{\mapsto} v[u(a)] = v \circ u(a)$$

Si *u* est une fonction dérivable en *a* et *v* une fonction dérivable en *b* = *u*(*a*), alors *v*∘*u* est dérivable en *a* et $(v \circ u)'(a) = v' \circ u(a) \times u'(a)$

Exemples.
▶1. $f(x) = \sin^2 x$, on décompose en $x \overset{u}{\mapsto} \sin x \overset{v}{\mapsto} (\sin x)^2$
$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)] = \cos x \times 2(\sin x) = 2\sin x\cos x$.

▶2. $f(x)=\sqrt{x^2-3x+1}$, on décompose $x \overset{u}{\mapsto} x^2-3x+1 \overset{v}{\mapsto} \sqrt{x^2-3x+1}$
$(v\circ u)'(x)=u'(x)\times v'[u(x)]=(2x-3)\times\frac{1}{2\sqrt{x^2-3x+1}}=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+1}}$.
▶3. $f(x)=\cos\left(7x+\frac{\pi}{6}\right)$, on décompose $x \overset{u}{\mapsto} 7x+\frac{\pi}{6} \overset{v}{\mapsto} \cos\left(7x+\frac{\pi}{6}\right)$
$(v\circ u)'(x)=u'(x)\times v'[u(x)]=-7\sin\left(7x+\frac{\pi}{6}\right)$.

Propriété. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$
$x \overset{u}{\mapsto} u(x) \overset{v}{\mapsto} \left(u(x)\right)^{\alpha}$ donc $v\circ u=u^{\alpha}$
$(v\circ u)'(x)=u'(x)\times v'\circ u(x)=u'(x)\times\alpha u^{\alpha-1}(x)$
donc $(u^{\alpha})'=\alpha\times u^{\alpha-1}\times u'$

Exemple.
$f(x)=(4x-3)^3$, $f'(x)=3\times(4x-3)^2\times 4=12\times(4x-3)^2$

III. Dérivées successives d'une fonction

Définition.
Soit une fonction f dérivable sur I telle que f' soit dérivable aussi sur I.
On appelle dérivée seconde de la fonction f et on note f'', la fonction dérivée de la dérivée f'. On appelle dérivée d'ordre k de la fonction f et on note $f^{(k)}$, la fonction dérivée de la dérivée d'ordre k–1 : $f^{(k-1)}$. $f''=(f')'$, $f'''=(f'')'$, $f^{(4)}=(f''')'$, $f^{(5)}=\left(f^{(4)}\right)'$, … , $f^{(k)}=\left(f^{(k-1)}\right)'$

Exemple.
$f(x)=4x^3-x^2+2x-4$ $f'(x)=12x^2-2x+2$ $f''(x)=24x-2$ $f'''(x)=24$

Exemple.
Pour appréhender au mieux le mouvement d'un corps, le physicien étudie l'évolution dans le temps de la position $d(t)$ d'un objet, de sa vitesse $d'(t)$ et de son accélération $d''(t)$.
Un chariot se déplace dans un mouvement uniforme de translation rectiligne.
Il se déplace à la vitesse constante de 1,4 m.s^{-1}.
Son accélération est nulle.
Sa position à l'instant t est $d(t)=v\times t=1{,}4\times t$ mètres, en considérant comme origine la position initiale soit $d(0)=0$ m.
La vitesse est la dérivée de la position.
L'accélération est la dérivée de la vitesse donc la dérivée seconde de la position.

IV. théorème de la bijection

Définition
On dit qu'une fonction est strictement monotone sur un intervalle [a,b] si elle est strictement croissante sur cet intervalle c'est-à-dire que pour tout x de]a ;b[f'(x)>0 ou si elle est strictement décroissante sur cet intervalle c'est-à-dire que pour tout x de]a ;b[f'(x)<0

Théorème de la bijection
Si f est une fonction dérivable sur [a ;b] et si pour tout x de]a ;b[f'(x)>0, pour tout élément k de $[f(a);f(b)]$, l'équation f(x)=k admet une unique solution dans [a ;b].
Si f est une fonction dérivable sur [a ;b] et si pour tout x de]a ;b[f'(x)<0, pour tout élément k de $[f(b);f(a)]$, l'équation f(x)=k admet une unique solution dans [a ;b].

Exemple :
Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 3$
Prouvez qu'il n'existe qu'une seule solution à l'équation f(x) = 2 dans l'intervalle [-1;1]
$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x+1)^2$
Ainsi sur]-1;1[f'(x)>0 la fonction est donc strictement croissante.
f(-1) = -4 et f(1) = 4 on a donc 2 qui est dans [f(-1);f(1)]
donc d'après le théorème de la bijection 2 a un unique antécédent par f dans [-1;1]

Remarque :
le théorème de la bijection permet de prouver l'existence et l'unicité de l'antécédent d'une valeur dans un intervalle I par une fonction strictement monotone sur I, mais elle ne nous aide pas vraiment à trouver la valeur de cet antécédent.

V. Equation d'une tangente à la courbe

Propriété.
Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I, soit *a* un point de l'intervalle I tel que *f* soit dérivable en *a*.
On note A le point de la courbe c_f de coordonnées (a ; $f(a)$).
La tangente à la courbe c_f au point A a pour équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Exemple.
$f(x) = \sqrt{x}$, déterminer l'équation de la tangente à la courbe de *f* pour $x = 1$.
$f(1) = \sqrt{1} = 1$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(1) = \frac{1}{2}$ donc $y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{2}(x-1) + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.