Le programme :

Les premiers éléments de l'étude des nombres complexes ont été mis en place en première. L'objectif est de compléter cet acquis pour fournir des outils utilisés en algèbre, en trigonométrie et en sciences physiques. Les élèves doivent connaître les notations $a + bi$ et $a + bj$ cette dernière étant utilisée en électricité. Le temps consacré à cette partie du programme doit être plus important dans les spécialités « génie électronique » et « génie électrotechnique » où une interprétation géométrique de quelques transformations complexes élémentaires est introduite en vue des applications en électronique.

Module, module d'un produit, inégalité triangulaire. Argument d'un nombre complexe non nul, notation $re^{i\theta}$.	Les élèves doivent savoir interpréter géométriquement le module de $b–a$. Toute autre formulation de propriétés géométriques à l'aide de nombres complexes doit faire l'objet d'indications.
Relation $e^{i\theta}e^{i\theta©} = e^{i(\theta+\theta©)}$, lien avec les formules d'addition ; formule de Moivre.	
Formules d'Euler : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$	
Interprétation géométrique de $z \mapsto z + a$ et $z \mapsto e^{i\theta}z$.	Ceci n'est au programme que des spécialités « génie électronique » et « génie électrotechnique ».

Travaux pratiques

Résolution des équations du second degré à coefficients réels.	La résolution d'équations à coefficients complexes et l'étude des racines *n-ième* de l'unité sont hors programme.
Exemples de mise en œuvre des formules de Moivre et d'Euler (linéarisation de polynômes trigonométriques...).	On se bornera à des exposants peu élevés ; les formules trigonométriques ainsi obtenues n'ont pas à être mémorisées de même que les formules de conversion de sommes en produits et de produits en sommes.

I. L'ensemble des nombres complexes :

Définition 1.

On note i le nombre complexe tel que $i^2 = –1$.
L'ensemble des **nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble des expressions de la forme $z = x+i\,y$ où $(x,y)\in \mathbb{R}^2$. Le nombre réel x est appelé la **partie réelle** de z. Le nombre réel y est appelé la **partie imaginaire** de z.
Le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$est appelé le **complexe conjugué** de z.
Le nombre réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$est appelé le **module** du nombre complexe z.
La notation $z = x + iy$ s'appelle la **forme cartésienne** ou encore **forme algébrique** du nombre complexe z.

Remarque : En électricité, la lettre i désigne l'intensité du courant, on utilise alors la lettre j pour les nombres complexes. On écrit $z = a + jb$ avec $j^2 = –1$.

Exemple :

▶1. Mettre sous forme algébrique z_A+z_B, z_Az_B et $(\overline{z_B})^2$ où $z_A = 4-3i$ et $z_B = -2+7i$. Calculer $|z_A|$ et $|z_B|$.

▶2. Mettre sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{2-3i}{1+i}$.

$$\frac{2-3i}{1+i} = \frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-3i-2i+3i^2}{1-i^2} = \frac{-1-5i}{2}$$

Propriété 2.

Pour tout nombre complexe z, $z\bar{z} = |z|^2$

Démonstration : Soit $z = x + iy$ un nombre complexe quelconque, $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$❑

Définition et propriété 3.

Le plan étant rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, tout nombre complexe $z = x + iy$ peut être associé soit au point M de coordonnées (x,y) soit au vecteur $\overrightarrow{OM}$de coordonnées $\binom{x}{y}$.

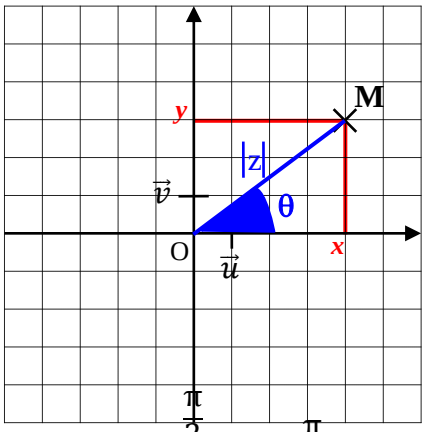
On dit alors que $z = x + iy$ est l'**affixe** du point $M(x,y)$ et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Le module ρ de z représente la longueur entre O et M : $\rho = OM = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Un **argument** de z, que l'on note arg z, est une mesure en radian de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.

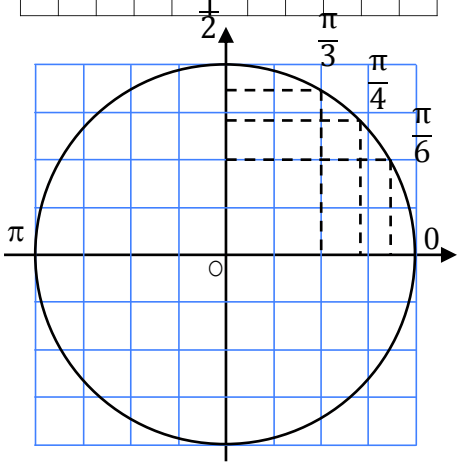
Soit θ un argument de z, les autres arguments de z sont de la forme $\theta+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

La notation $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = [\rho,\theta]$ s'appelle la **forme trigonométrique** du nombre complexe z.



Rappel :

Angle θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cosθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
sinθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Exemple : Déterminer la forme trigonométrique du nombre $z = -2 + 2i\sqrt{3}$.

Calcul du module : $|z| = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$

Donc $z = 4\left(\frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

Calcul de l'argument : on cherche l'angle θ tel que$\cos\theta = \frac{-1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ soit $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Donc $z = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

II. Propriétés du module et des arguments d'un complexe

Propriété 4 : Soit $z_1 = [\rho_1, \theta_1]$ et $z_2 = [\rho_2, \theta_2]$ deux nombres complexes non nuls

Le module d'un produit est le produit des modules : $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.

L'argument d'un produit est la somme des arguments à un nombre entier de tours près : $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

En résumé $[\rho_1, \theta_1] \times [\rho_2, \theta_2] = [\rho_1\rho_2, \theta_1 + \theta_2]$

Démonstration :

Soit $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ deux nombres complexes non nuls.

$$z_1 \times z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$z_1 \times z_2 = r_1 r_2 \times (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2)$$

or $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

donc $z_1 \times z_2 = r_1 r_2 \times (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$❑

Propriété 5 : Soit z un nombre complexe non nul

Le module de l'inverse est l'inverse du module : $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

L'argument de l'inverse est l'opposé de l'argument à un nombre entier de tours près : $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété 6 : Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls

Le module d'un quotient est le quotient des modules : $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

L'argument d'un quotient est la différence des arguments à un nombre entier de tours près : $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

En résumé $\frac{[\rho_1,\theta_1]}{[\rho_2,\theta_2]} = \left[\frac{\rho_1}{\rho_2}, \theta_1 - \theta_2\right]$

Propriété 7 : Soit z un nombre complexe non nul et $n \in \mathbb{Z}$

$|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

III. Equation du second degré :

Théorème 8.

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, on considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$. Pour résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- si $\Delta > 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une solution réelle double $z = \frac{-b}{2a}$
- si $\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Démonstration :

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

donc $az^2 + bz + c = 0$ est équivalent à $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}$

- si $\Delta > 0$ alors $az^2 + bz + c = 0$admet deux solutions réelles $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta = 0$ alors $az^2 + bz + c = 0$admet une solution réelle double $z = \frac{-b}{2a}$

• si $\Delta < 0$ alors $az^2 + bz + c = 0$admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$❑

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $x^2 - 6x + 10 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times 10 = -4 < 0$, l'équation $x^2 - 6x + 10 = 0$ possède donc deux racines complexes conjuguées : $x_1 = \frac{6+i\sqrt{4}}{2} = 3 + i$ et $x_2 = \frac{6-i\sqrt{4}}{2} = 3 - i$

IV. Forme exponentielle d'un nombre complexe :

Définition 9.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on note e^{ix} le nombre complexe $\cos x + i\sin x = [1, x]$.

Remarque : Le nombre complexe z de module ρ et d'argument θ peut se noter $z = [\rho, \theta] = \rho e^{i\theta}$.
Cette notation $z = \rho e^{i\theta}$ s'appelle la **forme exponentielle ou polaire** du nombre complexe z.

Propriété 10.
Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$,
$e^{ix}.e^{iy} = e^{i(x+y)}$ $\qquad \frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix}$

Propriété 11. Formule de Moivre Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

Exemple. La formule de Moivre est intéressante pour exprimer
$\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ *en fonction de puissnces de* $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$.
$\mathrm{Cos}(3\theta) = \mathrm{Re}(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^3) = \mathrm{Re}(\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta)$
$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

Propriété 12. Formule d'Euler Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

Démonstration : $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ et $e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x$
Donc $e^{ix} + e^{-ix} = \cos x + i\sin x + \cos x - i\sin x = 2\cos x$ soit $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$
Et $e^{ix} - e^{-ix} = \cos x + i\sin x - \cos x + i\sin x = 2i\sin x$ soit $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$❑

Exemple. Pour linéariser *i.e.* pour transformer ce produit en somme de termes du type $\cos nx$ ou $\sin nx$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

$$\cos x\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}-2e^{ix}e^{-ix}}{-4}\right) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}-2}{-4}\right)$$

$$\cos x\sin^2 x = \frac{1}{-8}(e^{3ix} + e^{-ix} - 2e^{ix} + e^{ix} + e^{-3ix} - 2e^{-ix}) = \frac{1}{-8}\left(e^{3ix} + e^{-3ix} - (e^{ix} + e^{-ix})\right)$$

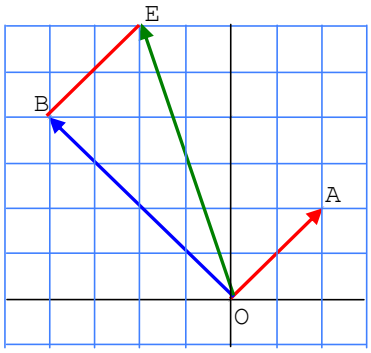
$$\cos x\sin^2 x = \frac{1}{-8}(2\cos 3x - 2\cos x) = \frac{\cos x - \cos 3x}{4}$$

V. Interprétation géométrique :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Théorème 13. Si A et B ont pour affixes z_A et z_B alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Conséquence : Si A et B ont pour affixes z_A et z_B alors $|z_B - z_A| = AB$ et si $A \neq B$ $\arg(z_B - z_A) = (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}})$



Propriété 14. Inégalité triangulaire : Soit z_A et z_B deux nombres complexes non nuls : $|z_A + z_B| \leq |z_A| + |z_B|$

Démonstration : Soit A le point s'affixe z_A et B celui d'affixe z_B donc $OA = |z_A|$ et $OB = |z_B|$.
On note E le point tel que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, l'affixe de E est $z_A + z_B$ donc $OE = |z_A + z_B|$.
Or dans le triangle OBE :
$OE \leq OA + OB$ donc $|z_A + z_B| \leq |z_A| + |z_B|$❑

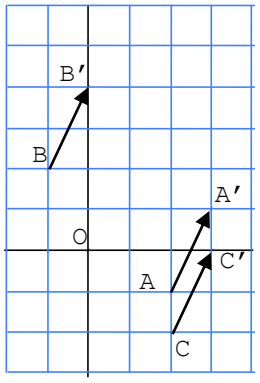
Interprétation géométrique de $\arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)$

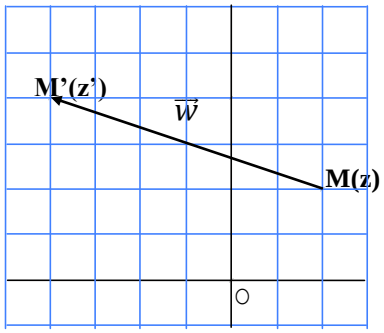
Soit M_1, M_2, et M_3 les points d'affixes respectives z_1 , z_2, et z_3,

$\arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{M_1M_3}}}{z_{\overrightarrow{M_1M_2}}}\right) = \arg\left(z_{\overrightarrow{M_1M_3}}\right) - \arg\left(z_{\overrightarrow{M_1M_2}}\right) + 2k\pi$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{M_1M_3}) - (\vec{u}; \overrightarrow{M_1M_2}) + 2k\pi = (\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) + 2k\pi$.

Activité.

Soit $z_A = 2 - i$, $z_B = -1 + 2i$ et $z_C = 2 - 2i$, placer les points $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$.
Soit $z = 1 + 2i$, placer les points A', B' et C' d'affixes respectives $z_A + z$, $z_B + z$ et $z_C + z$.
$z_A + z = 2 - i + 1 + 2i = 3 + i$,
$z_B + z = -1 + 2i + 1 + 2i = 4i$
et $z_C + z = 2 - 2i + 1 + 2i = 3$





Propriété 15. Translation

Soit a un nombre complexe.
L'application qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = z + a$ est une translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe a.

Activité.

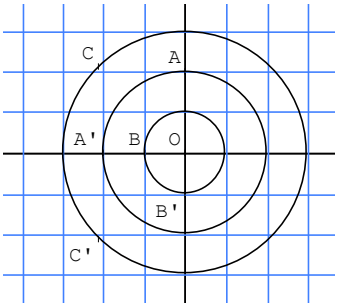
Soit $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_B = e^{i\pi}$ et $z_C = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$ placer les points A(z_A), B(z_B) et C(z_C).

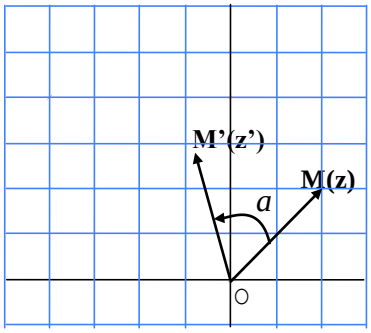
Soit $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$, placer les points A', B' et C' d'affixes respectives zz_A, zz_B et zz_C.

A' : $e^{i\frac{\pi}{2}}z_A = e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\pi}$

B' : $e^{i\frac{\pi}{2}}z_B = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\pi} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

C' : $e^{i\frac{\pi}{2}}z_C = e^{i\frac{\pi}{2}} \times 3e^{i\frac{3\pi}{4}} = 3e^{i\frac{5\pi}{4}}$





Propriété 16. Rotation

Soit *a* un nombre complexe.

L'application qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z'=ze^{ia}$ est une rotation de centre O et d'angle *a* rad.

Exemple :

▶1. Quelle est la fonction *f* de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associée à la translation T de vecteur $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$?

▶2. Quelle est la transformation géométrique G correspondant à la fonction *f* de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto -\frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)z$.