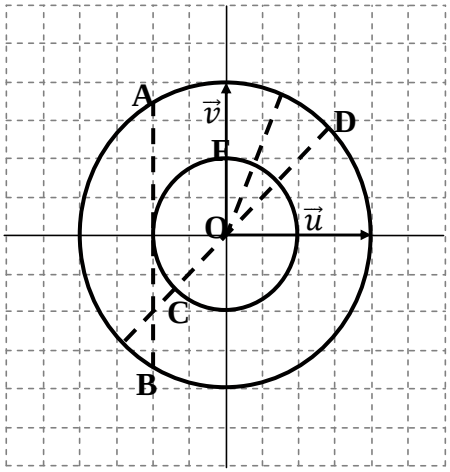
Contrôle : Complexes

Exercice 1.
Linéariser les polynômes trigonométriques suivants
$f_1(t) = \sin t \cos 3t$ $\qquad$ $f_2(t) = \sin t \sin 2t$

Exercice 2
Soit $z_1 = -5 - 5i$ et $z_2 = 3 - i\sqrt{3}$,
1) mettre ces deux complexes sous forme trigonométrique puis exponentielle
2) en déduire l'écriture exponentielle de ${z_1}^8$, en déduire l'écriture algébrique de ce nombre
3) donnez $z_1 \times z_2$ sous forme trigonométrique et sous forme algébrique
4) donnez $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme trigonométrique

Exercice 3
$(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal du plan complexe.
1. Placer les points M_1, M_2, M_3, M_6 d'affixes respectives $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $z_3 = \frac{1}{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, $z_6 = \frac{1}{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}$.
2. *a*) Donner la forme exponentielle des affixes *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, des points A, B, C, D, F.
b) Donner la forme algébrique de *b*, *c*, *et f*.



Exercice 4
Rotations et translations
1) Donner l'angle et l'expression algébrique correspondant à la rotation transformant A en B sachant que ces points ont respectivement comme affixe : $z_A = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $z_B = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$
2) Donnez les affixes des points C', D' et E' images par la rotation d'angle $\frac{-\pi}{4}$ de C, D et E les points d'affixes respectives : $z_C = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $z_D = 5e^{i\frac{\pi}{7}}$ et $z_E = -4\sqrt{3} + 4i$
3) A quelle type de transformation du plan complexe correspond l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ suivante : "$f: z \to z + 4 - 2i$", quelles sont ses caractéristiques.
4) Soit F et G les points d'affixes respectives $z_F = 3 + 2i$ et $z_G = 4 - 3i$, donnez les affixes des images A'', B'' et E'' des points A, B et E (décrits dans les questions précédentes) par la translation transformant F en G.

Correction

Exercice 1.

Linéariser les polynômes trigonométriques suivants

$$f_1(t) = \sin t\cos 3t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\frac{e^{i3t} + e^{-i3t}}{2} = \frac{e^{i4t} + e^{-i2t} - e^{i2t} - e^{-i4t}}{4i} = \frac{1}{2}\sin(4t) - \frac{1}{2}\sin(2t)$$

$$f_2(t) = \sin t\sin 2t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\frac{e^{i2t}-e^{-i2t}}{2i} = \frac{e^{i3t}-e^{-it}-e^{it}+e^{i3t}}{-4} = \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\cos(3t),$$

Exercice 2

Soit $z_1 = -5 \pm 5i$ et $z_2 = -3 + i\sqrt{3}$,

1) $|z_1| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$ et $\begin{cases} cos\theta = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ $z_1 = [5\sqrt{2}; \frac{5\pi}{4}]$

$|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = 2\sqrt{3}$ et $\begin{cases} cos\theta = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \pi - \frac{\pi}{6}$ $z_2 = [2\sqrt{3}; \frac{5\pi}{6}]$

2) ${z_1}^8 = [5\sqrt{2}; \frac{5\pi}{4}]^8 = \left[\left(5\sqrt{2}\right)^8; 8\frac{5\pi}{4}\right] = [6\,250\,000; 10\pi] = [6\,250\,000; 0] = 6\,250\,000,$

3) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{[5\sqrt{2}; \frac{5\pi}{4}]}{[2\sqrt{3}; \frac{5\pi}{6}]} = \left[\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}; \frac{5\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}\right] = \left[\frac{5\sqrt{6}}{6}; \frac{10\pi}{12}\right] = \left[\frac{5\sqrt{6}}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$

4) $z_1 \times z_2 = \left[5\sqrt{2}; \frac{5\pi}{4}\right]\left[2\sqrt{3}; \frac{5\pi}{6}\right] = \left[5\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}; \frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right] = \left[10\sqrt{6}; \frac{50\pi}{12}\right] = \left[10\sqrt{6}; \frac{25\pi}{6}\right] = \left[10\sqrt{6}; \frac{\pi}{6}\right]$

Exercice 3.

(O,$\vec{u}$,$\vec{v}$) est un repère orthonormal du plan complexe.

1.

2. *a*) Des informations de l'énoncé on peut déduire que arg(d)= $\frac{\pi}{4}$,

arg(c)= $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

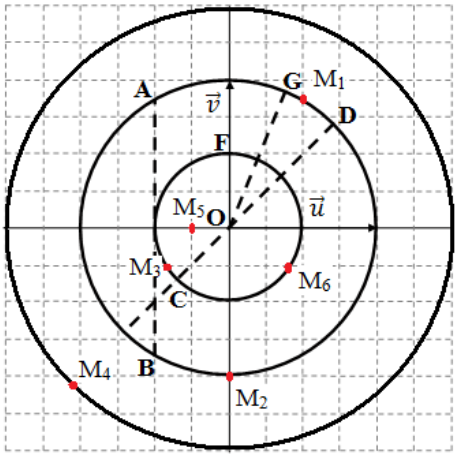
Par lecture graphique on a : arg(a) = $\frac{2\pi}{3}$, arg(b) = $\frac{-2\pi}{3}$ et arg(f) = $\frac{\pi}{2}$

Les modules étant triviaux on aura donc

a=$1e^{i\frac{2\pi}{3}}$ b = $1e^{i\frac{-2\pi}{3}}$ c = $\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ d = $1\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ f = $\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

Donner la forme polaire des affixes *b*, *c*, *et f* des points A, B, C, D, F, G.

$b = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $c = -\frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}$, $f = i\frac{1}{2}$.



Exercice 4

Rotations et translations

1) On a bien $|z_A| = |z_B|$ et $Arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = Arg\left(\frac{4e^{-i\frac{\pi}{6}}}{4e^{i\frac{\pi}{2}}}\right) = Arg\left(e^{-i\frac{\pi}{6}-i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{-4\pi}{6} = \frac{-2\pi}{3}$, ainsi $z \to z\,e^{-i\frac{4\pi}{6}}$
2) La rotation est associée à $z \to z\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc $z_{C'} = e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, $z_{D'} = 5e^{i\frac{\pi}{7}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{-i\frac{3\pi}{28}}$ et $z_{E'} = (-4\sqrt{3} + 4i)e^{-i\frac{\pi}{4}} = (-4\sqrt{3} + 4i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{6} + i2\sqrt{6} + i2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = (2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}) + i(2\sqrt{2} + 2\sqrt{6})$
3) Si je pose $\vec{w}$ le vecteur d'affixe $z_0 = 4 - 2i$, f correspond à la translation de vecteur $\vec{w}$.
4) Soit F et G les points d'affixes respectives $z_{\overrightarrow{FG}} = z_G - z_F = 4 - 3i - (3 + 2i)$= 1-5i, la fonction associée à la translation sera $z \to z + z_{\overrightarrow{FG}}$ ou encore $\to z + 1 - 5i$. $z_A = 4e^{i\frac{\pi}{2}} = 4i$ donc $z_{A'} = 1 - 3i$, $z_B = 4e^{-i\frac{\pi}{6}} = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} - i2$ donc $z_{B'} = 1 + 2\sqrt{3} - 7i$et $z_G = 4 - 3i$,et $z_E = -4\sqrt{3} + 4i$ donc $z_{E'} = 1 - 4\sqrt{3} - i$