Nom & Prénom : …………………………………………………….. dimension-k.com

Devoir surveillé n°4

Exercice 1 (6,5 points)

Soit w la fonction qui a tout x de ℝ associe le réel $w(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

1) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition
2) Déterminer la dérivée w' de la fonction w
3) Faire le tableau de variation
4) Prouver qu'il existe un unique α dans [0 ; 2,3] tel que $w(\alpha) = 0$
5) A l'aide de votre calculatrice trouvez la valeur de α

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction qui a tout x réel de $]-1;+\infty[$ associe le réel $f(x) = \frac{x^3-3x^2-10x+12}{x+1}$

1) Donner les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2) Quelle(s) asymptotes peut on déduire des limites ?

Exercice 3 (4 points)

Soit g la fonction qui a tout x réel de $]-\infty;+\infty[$ associe le réel $g(x) = \frac{3x^2-x+12}{x^2-10x+20}$.

1) Donner les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2) Quelle(s) asymptotes peut on déduire des limites ?

Exercice 4 (4 points)

Soit h la fonction qui a tout x réel de $]2;+\infty[$ associe le réel $h(x) = \frac{x^2+x-3}{x-2}$

1) Montrer que y = x+3 est asymptote oblique en $+\infty$
2) Comment est située la courbe de h par rapport à l'asymptote oblique ?

Exercice 5 (4 points)

Soit j la fonction qui a tout x réel de $]-5;+\infty[$ associe le réel $j(x) = \frac{2x^2+7x-20}{x+5}$

1) Déterminer a, b et c tels que $j(x) = ax - b + \frac{c}{x+5}$
2) Conjecturer (deviner) l'équation de la tangente en $+\infty$

Bonus / exercices alternatifs

Exercice 6 (4 points)

Soit k la fonction qui a tout x réel de $]0;+\infty[$ associe le réel $k(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

1) Conjecturez à l'aide de votre calculatrice la limite de k en $+\infty$
2) A l'aide d'un encadrement bien pensé, prouvez votre conjecture

Exercice 7 (3 points)

Soit n la fonction qui a tout x réel de $]0;+\infty[$ associe le réel $n(x) = \left(\frac{x^2+x-5}{x}\right)^{100}$

Donner les limites de n aux bornes de son ensemble de définition

Exercice 1 (points)

1) $w(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = x^3\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2} + \frac{24}{x^3}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2} + \frac{24}{x^3} = 1$ donc $\lim_{x\to+\infty} w(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2} + \frac{24}{x^3} = 1$ donc $\lim_{x\to-\infty} w(x) = -\infty$

2) $w'(x) = 3x^2 - 6x - 10$ $\Delta = 36 + 120 = 156$ $x_1 = \frac{3-\sqrt{156}}{6} \approx -1{,}58$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{156}}{6} \approx 2{,}58$

3) tableau de variation

4) sur [0 ;2,3] $w'(x) < 0$ donc w est strictement décroissante sur [0 ;2,3]

w(0) =24 et w(2,3) =-2,703 donc on a bien 0 encadré par w(0) et w(2,3) donc d'après le théorème de la bijection il existe un unique α dans [0 ;2,3] tel que $w(\alpha) = 0$ 5) à l'aide de la calculatrice on trouve $\alpha = 2$

Exercice 2 (points)

1) $f(x) = \frac{x^3-3x^2-10x+12}{x+1}$ $\lim_{x\to-1} x^3 - 3x^2 - 10x + 12 = 18$ et $\lim_{x\to-1} x + 1 = 0^+$ donc $\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$

$f(x) = \frac{x^3-3x^2-10x+12}{x+1} = \frac{x^3\left(1-\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}+\frac{12}{x^3}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = x^2\frac{1-\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}+\frac{12}{x^3}}{1+\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}+\frac{12}{x^3}}{1+\frac{1}{x}} = 1$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) $\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$ donc il y a une asymptote verticale d'équation x=-1

Exercice 3 (points)

1) $g(x) = \frac{3x^2-x+12}{x^2-10x+20} = \frac{x^2\left(3-\frac{1}{x}+\frac{12}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{10}{x}+\frac{20}{x^2}\right)} = \frac{\left(3-\frac{1}{x}+\frac{12}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{10}{x}+\frac{20}{x^2}\right)}$. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(3-\frac{1}{x}+\frac{12}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{10}{x}+\frac{20}{x^2}\right)} = 3$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$

2) la courbe de g admet donc une asymptote horizontale d'équation y=3

Exercice 4 (points)

$h(x) - y = \frac{x^2+x-3}{x-2} - (x+3) = \frac{x^2+x-3-(x+3)(x-2)}{x-2} = \frac{x^2+x-3-(x^2+x-6)}{x-2} = \frac{3}{x-2}$. $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x-2} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (x+3)] = 0$ donc y = x+3 est bien asymptote

$h(x) - y = \frac{3}{x-2}$ or sur $]2; +\infty[$ $\frac{3}{x-2} > 0$ et donc h(x)>y, la courbe est au-dessus de son asymptote

Exercice 5 (points)

$ax - b + \frac{c}{x+5} = \frac{(ax-b)(x+5)+c}{x+5} = \frac{ax^2+x(5a-b)-5b+c}{x+5}$ donc $j(x) = ax - b + \frac{c}{x+5}$

$\Leftrightarrow \frac{2x^2+7x-20}{x+5} = \frac{ax^2+x(5a-b)-5b+c}{x+5} \Leftrightarrow 2x^2 + 7x - 20 = ax^2 + x(5a-b) - 5b + c$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 5a - b = 7 \\ -5b + c = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ -5b + c = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -5 \end{cases}$ ainsi $j(x) = 2x - 3 + \frac{-5}{x+5}$

l'équation de la tangente en $+\infty$ devrait être y=2x-3

Exercice 6 (points)

Ici $k(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, on a : $-1 \le \sin(x) \le 1$ comme x est strictement positif on a : $-\frac{1}{x} \le \frac{\sin(x)}{x} \le \frac{1}{x}$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$

Exercice 7 (points)

$n(x) = \frac{x^2+x-5}{x} = \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{x} = x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}\right) = 1$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-5}{x} = +\infty$

De plus $\lim_{t\to+\infty} t^{99} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-5}{x}\right)^{99} = +\infty$

$\frac{x^2+x-5}{x} = x + 1 - \frac{5}{x}$, $\lim_{x\to0} x + 1 = 0$ et $\lim_{x\to0} -\frac{5}{x} = -\infty$ donc $\lim_{x\to0} \frac{x^2+x-5}{x} = -\infty$

De plus $\lim_{t\to-\infty} t^{99} = -\infty$ donc $\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2+x-5}{x}\right)^{99} = -\infty$